



# فہستہ بوک ریاضی (۲)

رشتہ تہربی

FAST BOOK



قاسم صیفزادہ

علی فرشتیان



# لوح برتر انتخاب برتر



فست بوک لاسابان (۱)

رشته ریاضی



فست بوک ریاضی دهم

تجربی و ریاضی



تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین لپافی نژاد و جمهوری، پلاک ۱۲۱۳

۶۶۱۷۵-۵۳-۶۶۹۷۱۹۷۰-۶۶۹۷۱۸۰۴-۶۶۹۷۲۴۷۸

Lohebartarpub Lohebartar www.Lohebartar.ir

سامانه پیامکی: ۰۳۶۴۰۰۰۵۳۶



QR code

# فہستہ بھوک ریاضی (۲) رشتہ تہربی

آموزش سریع، آسان  
تمرین تشریحی و تست

مؤلفان

علی فرشتیان، قاسم صیف زاده

انتشارات لوح برتر



## فهرست

۶	درس اول: هندسه تحلیلی
۲۲	درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲
۴۴	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۵۶	تست‌های فصل اول
۵۷	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل اول
	<b>فصل دوم: هندسه</b>
۶۲	درس اول: ترسیم‌های هندسی
۷۲	درس دوم: استدلال و قضیه تالس
۸۶	درس سوم: تشابه مثلث‌ها
۹۸	تست‌های فصل دوم
۱۰۰	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل دوم
	<b>فصل سوم: تابع</b>
۱۰۴	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع
۱۲۶	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
۱۳۸	درس سوم: اعمال جبری روی توابع
۱۵۱	تست‌های فصل سوم
۱۵۳	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل سوم
	<b>فصل چهارم: مثلثات</b>
۱۵۶	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
۱۶۶	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۸۶	درس سوم: توابع مثلثاتی
۱۹۷	بیش‌تر بدانیم
۱۹۸	تست‌های فصل چهارم
۲۰۰	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل چهارم
۲۰۳	آزمون نوبت اول
	<b>فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی</b>
۲۰۸	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۲۲۰	درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
۲۴۲	درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
۲۵۵	بیش‌تر بدانیم
۲۵۶	تست‌های فصل پنجم
۲۵۸	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل پنجم
	<b>فصل ششم: حد و پیوستگی</b>
۲۶۲	درس اول: فرایندهای حدی
۲۷۴	درس دوم: محاسبه‌ی حد توابع
۲۸۸	درس سوم: پیوستگی
۳۰۲	بیش‌تر بدانیم
۳۰۴	تست‌های فصل ششم
۳۰۶	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل ششم
	<b>فصل هفتم: آمار و احتمال</b>
۳۱۰	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
۳۲۸	درس دوم: آمار توصیفی
۳۵۱	تست‌های فصل هفتم
۳۵۳	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل هفتم
۳۵۷	آزمون نوبت دوم
۳۶۲	پاسخ تشریحی آزمون نوبت اول
۳۶۵	پاسخ تشریحی آزمون نوبت دوم



## به نام او که هر چه داریم از اوست

### مقدمه ناشر

با استقبال بی نظیر دانش آموزان عزیز از فست بوک های ریاضی هفتم، هشتم، نهم، دهم و حسابان (۱) و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطه دوم، با عنایت پروردگار و همت گروه مؤلفان توانستیم مجموعه حاضر را با نام «**فست بوک ریاضی (۲)**» رشته علوم تجربی با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش و تمرین، یک صفحه مثال و پاسخ، طراحی و تدوین کنیم.

برای آشنایی بیش تر شما عزیزان با این مجموعه، برخی از ویژگی های اصلی آن را با هم مرور می کنیم:

۱- کتاب حاضر کلیه مباحث کتاب درسی جدید پایه یازدهم رشته علوم تجربی را دربرمی گیرد. مؤلفان این مجموعه تمام تلاش خود را به کار برده اند تا همه نکات کلیدی درس ها و تمرین های کتاب درسی را آموزش دهند.

۲- سعی کرده ایم با زبانی ساده و روان، تمام مفاهیم کتاب درسی را آموزش دهیم. به طور کلی ساختار این کتاب به گونه ای است که صفحات زوج به آموزش و تمرین و صفحات فرد به حل مثال اختصاص داده شده است.

۳- هر فصل به چند درس تقسیم شده و ابتدا بخش آموزش و سپس سؤالات تشریحی آن درس با پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی ارائه شده است.

۴- در پایان هر درس بخشی با نام «کاربرگ تمرینی دانش آموز» گنجانده شده است که کار دبیر را در ارائه تمرین های هدف دار برای تکلیف در منزل راحت می کند. پاسخ این بخش از طریق سایت و کانال تلگرام انتشارات در اختیار دبیران قرار خواهد گرفت.

۵- در پایان هر فصل تعدادی تست شناسنامه دار «کنکور و تألیفی» با پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی مطابق با کتاب درسی ارائه شده است.

۶- آزمون های تشریحی ۲۰ نمره ای ویژه نیم سال اول در پایان فصل چهارم و آزمون پایان سال در انتهای کتاب تکمیل کننده این مجموعه است که این آزمون ها دارای پاسخ تشریحی نیز می باشند.

۷- برای دانش آموزان مستعدتر، در پایان برخی از فصل ها، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نام «بیش تر بدانیم» ارائه شده است.

۸- برای حل تست های بیش تر می توانید به کتاب «تست کنکور ریاضی (۲) لوح برتر» مراجعه کنید.

حجم مناسب و جامع بودن این کتاب برای دانش آموزان هیجان انگیز است. ساختار آموزش سریع این مجموعه به گونه ای طراحی شده است که کار دبیر را در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش آموزان، ساده و آسان تر می کند. در ضمن توجه داشته باشید که نام «فست بوک» به خاطر ساختار آموزشی سریع کتاب است، نه حجم و تعداد صفحات آن. امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته، دانش آموزان عزیز و اولیای گرامی قرار گیرد. شما عزیزان می توانید نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق پل های ارتباطی زیر با ما در میان بگذارید.

صادق گرجی

مدیر انتشارات لوح برتر

پل های ارتباطی شما با ما

۶۶۹۷۲۴۷۸

۶۶۹۷۱۸۰۴

۶۶۹۷۱۹۷۰

۶۶۱۷۵۰۵۳

کانال انتشارات @Lohebartarpub

شماره تلگرام: ۰۹۳۶۰۴۷۵۱۲۵

سایت: Lohebartar.ir

پست الکترونیکی: Lohebartar@gmail.com

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰۵۳۶۴۰۰۰۵۳۶



#### فهرست داخلی فصل اول

درس اول: هندسه تحلیلی .....	۶
سؤالات تشریحی درس اول .....	۱۶
پاسخ سؤالات تشریحی درس اول .....	۱۷
کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول .....	۲۰
درس دوم: معادلات درجه دوم و تابع درجه ۲ .....	۲۲
سؤالات تشریحی درس دوم .....	۳۸
پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم .....	۳۹
کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم .....	۴۲
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی .....	۴۴
سؤالات تشریحی درس سوم .....	۵۲
پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم .....	۵۳
کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم .....	۵۵
تست‌های فصل اول .....	۵۶
پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل اول .....	۵۷

آموزش و تمرین

درس اول: هندسه تحلیلی (معادله خط)

هر معادله به صورت  $y = ax + b$  را یک معادله خط می‌گوییم، زیرا اگر تمام پاسخ‌های این معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، تشکیل یک خط می‌دهد. از هر دو نقطه متمایز تنها یک خط عبور می‌کند، بنابراین با داشتن دو نقطه از یک خط می‌توان معادله آن را نوشت و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد. محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها را، عرض از مبدأ خط می‌گوییم.

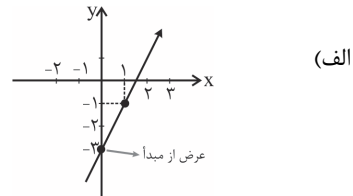
**تمرین (۱):** نمودار خط‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم و عرض از مبدأ را مشخص کنید.

الف)  $y = 2x - 3$                       ب)  $x + 3y = 3$

**پاسخ:** برای رسم خط، ابتدا دو نقطه از آن را به دست می‌آوریم، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \times 0 - 3 = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

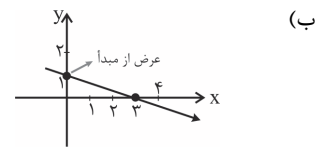
$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \times 1 - 3 = -1 \Rightarrow (1, -1)$$



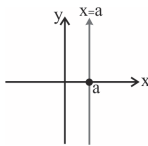
عرض از مبدأ = -3

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 3y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{3} = 1$$

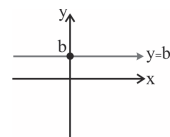
$$y = 0 \Rightarrow x + 3 \times 0 = 3 \Rightarrow x = 3$$



عرض از مبدأ = 1



**نکته (۱):** خط  $x = a$ ، خطی موازی محور عرض‌هاست و به صورت مقابل رسم می‌شود.

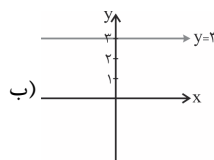
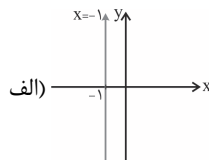


**نکته (۲):** خط  $y = b$ ، خطی موازی محور طول‌هاست و به صورت مقابل رسم می‌شود.

**تمرین (۲):** خط‌های مقابل را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف)  $x = -1$                       ب)  $y = 3$

**پاسخ:**



مثال و پاسخ

مثال: نمودار هر یک از خط‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

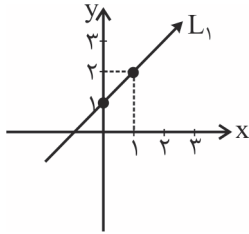
الف)  $L_1: y = x + 1$

ب)  $L_2: y = 1$

پ)  $L_3: x = 2$

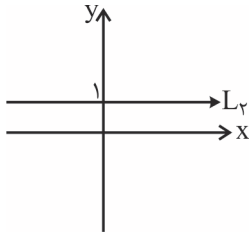
ت)  $L_4: 2x + 3y = 6$

پاسخ:

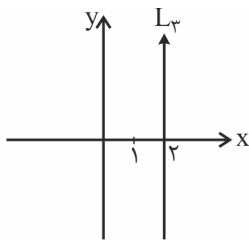


الف)

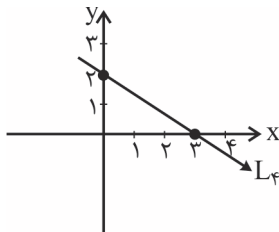
$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \\ x = 1 &\Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 1 \quad 2 \end{array}$$



ب)  $y = 1$ ، خطی موازی محور طول‌ها است.



پ)  $x = 2$ ، خطی موازی محور عرض‌ها است.



ت)

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow 2 \times 0 + 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow (0, 2) \\ y = 0 &\Rightarrow 2x + 3 \times 0 = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow (3, 0) \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 3 \\ \hline y & 2 \quad 0 \end{array}$$

## آموزش و تمرین

## شیب خط - نوشتن معادله خط

شیب خط: نسبت جابه‌جایی عمودی خط به جابه‌جایی افقی خط را شیب خط گویند.  
**نکته (۱):** شیب خط گذرا از دو نقطه غیرهم‌طول  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**تمرین (۱):** شیب خطی که از نقاط  $A(2, -3)$  و  $B(4, 5)$  عبور می‌کند را به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$m_{AB} = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m_{AB} = 4$$

نوشتن معادله خط:

۱- اگر شیب خط  $m$  و نقطه  $A(x_1, y_1)$  از خط را داشته باشیم، با قرار دادن آن‌ها در رابطه زیر معادله خط به دست می‌آید.

$$y = mx + h$$

**تمرین (۲):** معادله خطی بنویسید که از نقطه  $P(-4, 0)$  عبور کند و شیب آن ۳ باشد.

☑ پاسخ:

$$m = 3 \Rightarrow y = 3x + h \xrightarrow{x=-4, y=0} 0 = 3 \times (-4) + h \Rightarrow 0 = -12 + h \Rightarrow h = 12$$

$$\Rightarrow y = 3x + 12$$

۲- اگر دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  از خط را داشته باشیم، ابتدا با استفاده از رابطه  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ، شیب خط را محاسبه می‌کنیم، سپس مانند روش اول معادله خط را به دست می‌آوریم.

**تمرین (۳):** معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه  $A(4, 1)$  و  $B(5, 3)$  عبور می‌کند.

$$m = \frac{3 - 1}{5 - 4} = \frac{2}{1} = 2$$

☑ پاسخ: ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

سپس معادله خط را می‌نویسیم (یکی از نقاط را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم).

$$m = 2 \Rightarrow y = 2x + h \xrightarrow{x=5, y=3} 3 = 2 \times 5 + h \Rightarrow h = -7 \Rightarrow y = 2x - 7$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): معادله خطی بنویسید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند و دارای شیب ۳- باشد.

پاسخ:

چون نقطه روی محور عرض‌هاست لذا طول آن صفر است پس  $A(0, 4)$

$$m = -3 \Rightarrow y = -3x + h \xrightarrow{x=0, y=4} 4 = -3 \times 0 + h \Rightarrow h = 4 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 4}$$

مثال (۲): معادله خطی بنویسید که از دو نقطه  $A(6, 1)$  و  $B(-1, 7)$  عبور کند.

پاسخ:

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

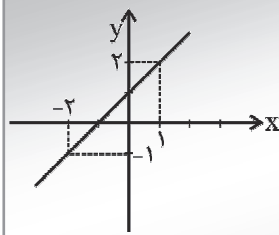
$$m_{AB} = \frac{7-1}{-1-6} = \frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$$

سپس معادله خط را می‌نویسیم:

$$m = -\frac{6}{7} \Rightarrow y = -\frac{6}{7}x + h \xrightarrow{x=6, y=1} 1 = -\frac{6}{7} \times 6 + h$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{36}{7} + h \Rightarrow h = 1 + \frac{36}{7} \Rightarrow h = \frac{43}{7} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{6}{7}x + \frac{43}{7}}$$

مثال (۳): معادله خط  $L$  را به دست آورید.



پاسخ:

مختصات دو نقطه  $A(1, 2)$  و  $B(-2, -1)$  را داریم:

$$m_{AB} = \frac{-1-2}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$m = 1 \Rightarrow y = x + h \xrightarrow{x=1, y=2} 2 = 1 + h \Rightarrow h = 1 \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

## آموزش و تمرین

## شرط موازی بودن - عمود بودن دو خط

برای محاسبه شیب و عرض از مبدأ خط از روی معادله آن، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

شماره	معادله خط	شیب	عرض از مبدأ	مثال	شیب m	عرض از مبدأ h
۱	$y = mx + h$	m	h	$y = \frac{5}{3}x - 3$	$\frac{5}{3}$	-3
۲	$ax + by = c$	$-\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$3x - 2y = 1$	$-\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{-2}$
۳	$x = a$ ( $a \neq 0$ )	تعریف نشده	ندارد	$x = 3$	تعریف نشده	ندارد
۴	$y = b$	o	b	$y = \sqrt{2}$	o	$\sqrt{2}$

**نکته (۱):** شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌های برابر باشند.

**تمرین (۱):** آیا دو خط  $L_1: y = \frac{1}{2}x + 5$  و  $L_2: 3x - 6y = 10$  با هم موازی هستند؟

**پاسخ:**  شیب دو خط را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} L_1: y = \frac{1}{2}x + 5 \xrightarrow{\text{شماره ۱}} m_{L_1} = \frac{1}{2} \\ L_2: 3x - 6y = 10 \xrightarrow{\text{شماره ۲}} m_{L_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow m_{L_1} = m_{L_2}$$

چون شیب دو خط برابر است، دو خط موازی هستند.

**نکته (۲):** شرط عمود بودن دو خط غیرموازی با محورهای مختصات آن است که شیب دو خط عکس و قرینه هم باشد، یا این‌که حاصل ضرب شیب‌های دو خط برابر -۱ شود.

**تمرین (۲):** آیا دو خط  $L_1: y = 3x + 5$  و  $L_2: 2y = 3x - 1$  بر هم عمودند؟

$$L_1: y = 3x + 5 \xrightarrow{\text{شماره ۱}} m_{L_1} = 3 \quad \text{پاسخ: } \input checked="" type="checkbox"/>$$

$$L_2: 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{شماره ۱}} m_{L_2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{L_1} \times m_{L_2} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \neq -1 \quad \text{دو خط بر هم عمود نیستند.}$$

**نکته (۳):** دو خط که نه موازی باشند و نه عمود بر هم، را متقاطع غیرعمود گویند.

**نکته (۴):** خط  $x = a$  بر خط  $y = b$  همواره عمود است.



## مثال و پاسخ

مثال (۱): شیب و عرض از مبدأ خطهای زیر را به دست آورید.

الف)  $L_1 : x = 4y - 1$

ب)  $L_2 : 3y + \frac{4}{3} = \sqrt{6}x$

پاسخ:

$$\text{الف) } L_1 : x = 4y - 1 \Rightarrow x - 4y = -1 \xrightarrow{\text{شماره ۲}} m_{L_1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}, \quad h = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

عرض از مبدأ

$$\text{ب) } L_2 : 3y + \frac{4}{3} = \sqrt{6}x \Rightarrow 3y - \sqrt{6}x = -\frac{4}{3} \xrightarrow{\text{شماره ۲}} m_{L_2} = \frac{-(-\sqrt{6})}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad h = \frac{-\frac{4}{3}}{3} = -\frac{4}{9}$$

مثال (۲): دو خط  $y = 7x - 2$  و  $x + 7y = 3$  نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاسخ:  شیب خطها را به دست می آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} x + 7y = 3 \xrightarrow{\text{شماره ۲}} m = \frac{-1}{7} \\ y = 7x - 2 \xrightarrow{\text{شماره ۱}} m' = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow m \times m' = \frac{-1}{7} \times 7 = -1$$

حاصل ضرب شیبها  $-1$  شد. لذا، دو خط بر هم عمودند.

مثال (۳): مقدار  $k$  را چنان تعیین کنید که دو خط  $L_1 : y = \frac{3}{4}x - 3$  و  $L_2 : (k-1)x + y = 4$

الف) با هم موازی باشند.

ب) بر هم عمود باشند.

پاسخ:  ابتدا شیب دو خط را محاسبه می کنیم:

$$L_1 : y = \frac{3}{4}x - 3 \xrightarrow{\text{شماره ۱}} m_{L_1} = \frac{3}{4}$$

$$L_2 : (k-1)x + y = 4 \xrightarrow{\text{شماره ۲}} m_{L_2} = \frac{-(k-1)}{1} = -k + 1$$

الف) شیبها را با هم برابر قرار می دهیم:

$$m_{L_1} = m_{L_2} \Rightarrow \frac{3}{4} = -k + 1 \Rightarrow k = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

ب) حاصل ضرب شیبها باید  $-1$  شود:

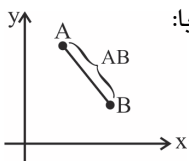
$$m_{L_1} \times m_{L_2} = -1 \Rightarrow \frac{3}{4} \times (-k + 1) = -1 \xrightarrow{\times 4} 3(-k + 1) = -4 \Rightarrow -3k + 3 = -4$$

$$\Rightarrow -3k = -7 \Rightarrow \boxed{k = \frac{7}{3}}$$

## آموزش و تمرین

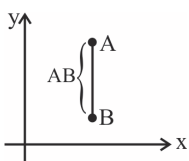
## فاصله دو نقطه از یکدیگر

فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  از یکدیگر در صفحه مختصات برابر است با:



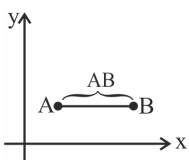
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\text{تفاضل عرضها})^2 + (\text{تفاضل طولها})^2}$$

**نکته (۱):** اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه هم‌طول باشند، داریم:



$$AB = |y_2 - y_1|$$

**نکته (۲):** اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه هم‌عرض باشند، داریم:



$$AB = |x_2 - x_1|$$

**نکته (۳):** فاصله نقطه  $A(x_1, y_1)$  از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

**تمرین (۱):** اگر  $A(3, 4)$ ،  $B(-1, 0)$  و  $C(4, 2)$  سه رأس یک مثلث باشند، طول اضلاع مثلث  $ABC$  را به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

✓ پاسخ:

$$AC = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

**نکته (۴):** برای به دست آوردن مختصات محل برخورد (تلاقی) دو خط، آن‌ها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم.

**تمرین (۲):** مختصات محل تلاقی دو خط  $2x + 3y = 12$  و  $x - y = 1$  را به دست آورید.

✓ پاسخ: معادله دو خط را در دستگاه قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ \times 3 \quad 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta x = 15 \Rightarrow \boxed{x = 3}, \quad x = 3 \Rightarrow 3 - y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): فاصله هر جفت از نقاط زیر را از یکدیگر به دست آورید.

الف)  $A(-1, 3), B(4, 0)$

ب)  $A(1, 1), B(2, 2)$

پ)  $A(3, 5), B(3, -10)$

ت)  $A(6, \sqrt{2}), B(60, \sqrt{2})$

پاسخ:

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(-1-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\text{ب) } AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{پ) } AB = |y_2 - y_1| = |-10 - 5| = 15$$

A و B هم‌طول هستند.

$$\text{ت) } AB = |x_2 - x_1| = |60 - 6| = 54$$

A و B هم‌عرض هستند.

مثال (۲): فاصله نقطه تلاقی دو خط  $x - y - 2 = 0$  و  $2x - y - 10 = 0$  را از مبدأ مختصات به دست آورید.

پاسخ:  ابتدا نقطه تلاقی را پیدا می‌کنیم.

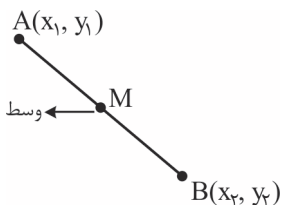
$$\begin{cases} 2x - y - 10 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases} \times (-1) \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$x - y - 2 = 0 \xrightarrow{x=8} 8 - y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6} \Rightarrow \text{مختصات محل تلاقی: } A(8, 6)$$

$$OA = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

آموزش و تمرین

نقطه وسط پاره خط - فاصله نقطه از خط



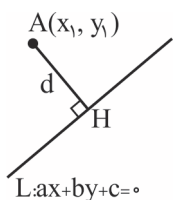
فرض کنید  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند. مختصات وسط پاره خط  $AB$  را با  $M$  نشان می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

**تمرین (۱):** اگر  $A(2, 4)$  و  $B(-8, 6)$ ، مختصات وسط پاره خط  $AB$  را بیابید.

$$M\left(\frac{-8+2}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = M(-3, 5)$$

✓ پاسخ:



فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه  $A(x_1, y_1)$  از خط  $L: ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$AH = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**تمرین (۲):** فاصله نقطه  $A(4, 6)$  را از خط  $3x + 4y - 2 = 0$  بیابید.

✓ پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \uparrow & \uparrow \\ A(4, 6) \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} 3x + 4y - 2 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad b \quad c \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|3(4) + 4(6) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{34}{5}$$

**نکته:** اگر فاصله دو خط موازی را از یکدیگر بخواهیم به دست آوریم، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطها در نظر می‌گیریم و فاصله آنرا تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم.

**تمرین (۳):** فاصله دو خط موازی  $2x - y - 3 = 0$  و  $y = 2x + 1$  را از یکدیگر به دست آورید.

✓ پاسخ: نقطه دلخواه روی خط  $y = 2x + 1$  در نظر گرفته و فاصله آن تا خط دیگر را می‌یابیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \times 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1) \Rightarrow d = \frac{|2 \times 0 - 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): الف) قرینه نقطه  $A(3, 5)$  را نسبت به نقطه  $M(5, 2)$  به دست آورید.  
 ب) قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

پاسخ: الف) فرض می‌کنیم که نقطه  $B$ ، قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $M$  باشد. در این صورت نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  است.

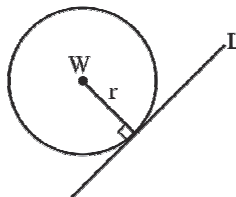
$$M(5, 2) = \left( \frac{3 + x_B}{2}, \frac{5 + y_B}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 + x_B}{2} = 5 \Rightarrow x_B = 7 \\ \frac{5 + y_B}{2} = 2 \Rightarrow y_B = -1 \end{cases} \Rightarrow B(7, -1)$$

ب) فرض کنیم  $C$  قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات باشد.

$$\begin{cases} \frac{\alpha + x_C}{2} = 0 \Rightarrow x_C = -\alpha \\ \frac{\beta + y_C}{2} = 0 \Rightarrow y_C = -\beta \end{cases} \Rightarrow C(-\alpha, -\beta)$$

مثال (۲): خط  $L: 2x - y = 3$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(1, 4)$  مماس است. شعاع دایره را به دست آورید.

پاسخ: برای به دست آوردن شعاع دایره، فاصله خط  $L$  را از نقطه  $W(1, 4)$  محاسبه می‌کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ L: 2x - y - 3 = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 & \end{array} \\ W(1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{|2 \times 1 - 1 \times 4 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

مثال (۳): فاصله دو خط موازی  $y = x + 1$  و  $\sqrt{3}y = \sqrt{3}x - 6$  را از یکدیگر به دست آورید.

پاسخ: نقطه‌ای دلخواه روی یک خط در نظر گرفته و فاصله آن تا خط دیگر را به دست می‌آوریم.

$$x=0 \\ y = x + 1 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 \\ \uparrow & \uparrow \\ A(0, 1) \\ \downarrow & \downarrow \\ \sqrt{3}y - \sqrt{3}x + 6 = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|\sqrt{3} \times 1 - \sqrt{3} \times 0 + 6|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3} + 6}{\sqrt{6}}$$

## سؤالات تشریحی درس اول

۱- خط  $L: 2y - 3x = 1$  و خط  $d: y = mx + 5$  را در نظر بگیرید.

الف) شیب خط  $d$  را به گونه‌ای تعیین کنید که  $d$  و  $L$  موازی باشند.

ب) به‌زای چه مقدار  $m$  دو خط بر هم عمودند؟

۲- مختصات نقطه میانی هر جفت از نقاط زیر را بیابید.

الف)  $A(3, 5), B(4, 1)$

ب)  $A(-3, -4), B(-6, 1)$

۳- فاصله هر جفت از نقاط زیر را از یکدیگر به‌دست آورید.

الف)  $A(3, 1), B(1, 3)$

ب)  $A(\sqrt{2}, 3), B(\sqrt{2}, 5)$

۴- مثلی با رئوس  $A(2, 4)$ ،  $B(0, 2)$  و  $C(4, 3)$  در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) مختصات نقطه  $M$ ، وسط ضلع  $AB$  را به‌دست آورید.

ب) طول میانه  $CM$  را حساب کنید.

پ) شیب خط گذرا از دو نقطه  $C$  و  $M$  را به‌دست آورید.

ت) معادله میانه  $CM$  را بیابید.

۵- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط  $A(2, -2)$  و  $B(6, 4)$  هستند.

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بنویسید.

ب) آیا نقطه  $C(7, 3)$  بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۶- در هر یک از قسمت‌های زیر فاصله نقطه  $A$  را از خط  $L$  به‌دست آورید.

الف)  $A(3, 5), L: 3x + 4y = 4$

ب)  $A(0, 1), L: y = -3x + 2$

۷- فاصله هر جفت از خط‌های موازی زیر را با یکدیگر به‌دست آورید.

الف)  $L_1: 5x - 12y + 8 = 0$ ،  $L_2: -10x + 24y + 10 = 0$

ب)  $L_1: y = 3x - 5$ ،  $L_2: 6x - 2y = 23$

۸- نقاط  $A(2, 3)$ ،  $B(-1, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۹- معادله‌های دو ضلع مربع  $y = 2x$  و  $2y - 4x = 5$  می‌باشد. مساحت مربع را به‌دست آورید.

## پاسخ سؤالات تشریحی درس اول

-۱

ابتدا شیب خط‌های L و d را به دست می‌آوریم:

$$L: \underset{b}{\downarrow} y - \underset{a}{\downarrow} x = 1 \Rightarrow m_L = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d: y = mx + \delta \Rightarrow m_d = m$$

الف) چون دو خط موازی هستند شیب‌هایشان برابر است.

$$m_d = m_L \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

ب) چون دو خط بر هم عمود هستند، شیب‌هایشان عکس و قرینه یکدیگرند پس:

$$m_d = \frac{-1}{m_L} \Rightarrow m = \frac{-1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

-۲

الف)  $A(3, 5), B(4, 1) \Rightarrow M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{3+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = M\left(\frac{7}{2}, 3\right)$

ب)  $A(-3, -4), B(-6, 1) \Rightarrow M\left(\frac{-3-6}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = M\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

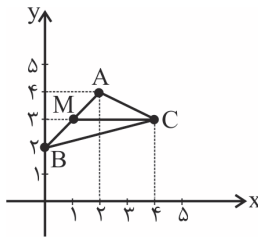
-۳

الف)  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ب) دو نقطه هم‌طول هستند، پس:

$$AB = |y_2 - y_1| = |5 - 3| = 2$$

۴- ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم.



الف)  $A(2, 4), B(0, 2) \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = M(1, 3)$

ب)  $C(4, 3), M(1, 3) \xrightarrow{\text{هم عرض}} CM = |4-1| = 3$

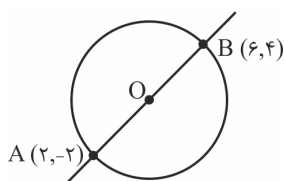
پ)  $m_{CM} = \frac{3-3}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$



$$CM \Rightarrow \boxed{y=3} \quad \text{خطی موازی محور X هاست}$$

ت)

۵-



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) برای به دست آوردن مختصات مرکز دایره، مختصات نقطه میانی A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$O\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = O\left(\frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) = O(4, 1)$$

برای محاسبه شعاع دایره فاصله نقطه A را تا مرکز دایره یعنی O محاسبه می‌کنیم.

$$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

 ب) فاصله نقطه C تا مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم. اگر برابر  $\sqrt{13}$  شد یعنی نقطه C روی محیط دایره است.

$$CO = \sqrt{(7-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

پس نقطه C روی محیط دایره است.

۶-

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{الف) } A(3, 5) & , \quad L: 3x - 4y = 4 \Rightarrow \begin{array}{ccc} 3x - 4y - 4 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad b \quad c \end{array} \end{array}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 5 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9 - 20 - 4|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{ب) } A(0, 1) \quad , \quad L: y = -3x + 2 \Rightarrow \begin{array}{ccc} y + 3x - 2 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad b \quad c \end{array}$$

$$d = \frac{|1 + 3 \times 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

۷-

الف) نقطه‌ای دلخواه روی یک خط به دست می‌آوریم و فاصله آن را تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم.

$$L_1: 5x - 12y + 8 = 0 \xrightarrow{x=0} 5 \times 0 - 12y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} A\left(0, \frac{2}{3}\right) \\ L_2: -10x + 24y + 10 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|-10 \times 0 + 24 \times \frac{2}{3} + 10|}{\sqrt{(-10)^2 + (24)^2}} = \frac{26}{\sqrt{676}} = \frac{26}{26} = 1$$

ب) نقطه‌ای دلخواه روی یک خط به دست می‌آوریم و فاصله آن را تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم.

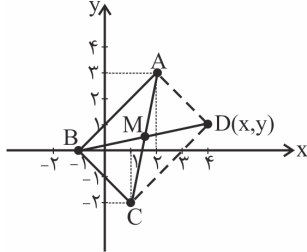
$$L_1 : y = 3x - 5 \xrightarrow{x=0} y = 3 \times 0 - 5 = -5 \Rightarrow A(0, -5)$$

$$A(0, -5) \left. \vphantom{A(0, -5)} \right\} \Rightarrow d = \frac{|6 \times 0 - 2 \times (-5) - 23|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{40}} = \frac{13\sqrt{40}}{40}$$

$$L_2 : 6x - 2y - 23 = 0$$

-۸

ابتدا مستطیل را رسم می‌کنیم.



می‌دانیم در هر مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. ابتدا مختصات نقطه M محل برخورد قطرها را به دست می‌آوریم.

$$A(2, 3), C(1, -2) \Rightarrow M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$B(-1, 0), D(x, y) \Rightarrow M\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{M وسط نقاط B و D نیز هست، پس:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -1+x=3 \Rightarrow x=4 \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات رأس چهارم به صورت } D(4, 1) \text{ است.}$$

-۹

$$2y - 4x = 5 \Rightarrow m = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{شیب دو خط } y = 2x \text{ و } 2y - 4x = 5 \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$y = 2x \Rightarrow m' = 2$$

دو خط موازی هستند. فاصله دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است.

$$2y - 4x = 5 \xrightarrow{x=0} 2y - 4 \times 0 = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$A\left(0, \frac{5}{2}\right) \left. \vphantom{A\left(0, \frac{5}{2}\right)} \right\} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = d = \frac{\left|\frac{5}{2} - 2 \times 0\right|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y - 2x = 0$$

$$S = d \times d = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}$$

## کاربرد تمرینی دانش آموز درس اول

۱- در هر قسمت، شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید دو خط نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟ (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود)

الف)  $L_1 = x - y = 2$  ،  $L_2 : y = x + 5$

ب)  $L_1 : y = \frac{3}{4}x + 1$  ،  $L_2 = -3x - 4y = 1$

پ)  $L_1 : y = 2$  ،  $L_2 : x = -1$

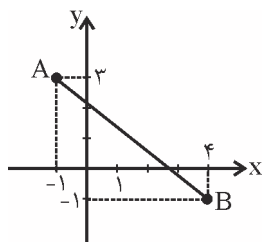
ت)  $L_1 : y = 2x$  ،  $L_2 : y = -4 + 3x$

۲- فاصله هر جفت از نقاط زیر را از یکدیگر به دست آورید.

الف)  $(3, -1), (4, 2)$

ب)  $(0, -3), (3, 0)$

۳- فاصله نقطه میانی پاره خط AB از مبدأ مختصات را به دست آورید.



۴- اگر  $A(-2, 3)$ ،  $B(2, 0)$  و  $C(0, -2)$  سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه AM را به دست آورید.

۵- اگر  $A(-1, 2)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس مثلث ABC باشند مثلث را رسم کنید و معادله ارتفاع AH را به دست آورید.

۶- طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط  $x + y = 5$  و مختصات یک رأس آن  $A(-2, 1)$  را به دست آورید.

۷- دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات از نقطه  $(-6, 8)$  عبور می‌کند. شعاع دایره را به دست آورید.

۸- به ازای کدام مقدار m فاصله نقطه  $(m, -m)$  از خط  $y = x$  برابر  $\sqrt{2}$  است؟



۹- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

الف) با داشتن ..... نقطه از یک خط می توان معادله آن را به دست آورد.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای ..... باشند.

پ) شرط عمود بودن دو خط آن است که شیب هایشان ..... باشند.

ت) خط با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$  معادله ای به صورت .....  $y =$  دارد.

۱۰- شیب و عرض از مبدأ خط  $y = -3x + 5$  به ترتیب برابر است با:

- (۱)  $-5, 3$       (۲)  $-3, 5$       (۳)  $5, -3$       (۴)  $3, -5$

۱۱- شیب و عرض از مبدأ خط  $4x - 8y + 1 = 0$  به ترتیب برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{4}, 2$       (۲)  $4, -2$       (۳)  $-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$

۱۲- خط  $d: (m+1)y = x + 2$  بر خط  $d': y = (2m+1)x + 1$  عمود است. مقدار  $m$  را بیاید.

۱۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(-1, -4)$  عبور کند و بر خط  $3x - 4y = 7$  عمود باشد.

۱۴- مثلث  $ABC$  با سه رأس  $A(1, 4)$ ،  $B(-2, 2)$  و  $C(4, 2)$  مفروض است.

الف) معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  را به دست آورید.

ب) طول میانه  $AM$  را محاسبه کنید.

پ) معادله ارتفاع  $BH$  را حساب کنید.

ت) نقطه تلاقی میانه  $AM$  و ارتفاع  $BH$  را به دست آورید.

۱۵- نقاط  $A(4, 2)$ ،  $B(1, -1)$  و  $C(6, -1)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. اگر  $H$  و  $M$  به ترتیب پای ارتفاع

$AH$  و میانه  $AM$  باشند، طول  $MH$  را به دست آوید.

۱۶- نقاط  $A(4, 1)$ ،  $B(8, -2)$  و  $C(0, 0)$  سه رأس یک مثلث هستند. طول پاره خطی که وسطهای دو پاره خط

$AB$  و  $BC$  را به یکدیگر وصل می کند، به دست آورید.

## آموزش و تمرین

## درس دوم: یادآوری از معادله درجه دوم

حالت کلی معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است که در آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$ . هر معادله درجه دوم حداکثر دارای ۲ جواب حقیقی است.

مهم‌ترین روش‌های حل معادله درجه دوم عبارت‌اند از: ۱- روش کلی یا دلتا ۲- روش تجزیه

۱- روش کلی یا دلتا: برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  ابتدا  $\Delta = b^2 - 4ac$  را محاسبه می‌کنیم. سپس یکی از سه حالت زیر را داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله ۲ جواب دارد (۲ ریشه حقیقی متمایز)} \\ \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ 2) \Delta = 0 \Rightarrow \text{معادله ۱ جواب دارد (ریشه مضاعف)} \\ \quad x = \frac{-b}{2a} \\ 3) \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \end{array} \right.$$

۲- روش تجزیه: برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  ابتدا عبارت را تجزیه می‌کنیم، سپس هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و جواب مسئله را به دست می‌آوریم.

**تمرین (۱):** معادله  $x^2 + 5x - 6 = 0$  را حل کنید.

☑ پاسخ:

راه اول:

$$1x^2 + 5x - 6 = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 > 0$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $a \quad b \quad c$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{-5 + 7}{2} = 1$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 - 7}{2} = -6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases} \quad \text{راه دوم:}$$

**نکته:** اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ ، ضرایب  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت باشند، آنگاه علامت  $\Delta$  مثبت است و معادله دارای دو جواب است.

**تمرین (۲):** معادله  $4x^2 - 2x - 3 = 0$  را در نظر بگیرید. چرا این معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

☑ پاسخ: با توجه به این که ضرایب ۴ و ۳- مختلف‌العلامت هستند، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

## مثال و پاسخ

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 - 3x = -2$

ب)  $u^2 - 13u + 22 = 0$

پ)  $x^2 + 1 = 2x$

پاسخ: الف) راه اول:

$$x^2 - 3x = -2 \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}x^2 - \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{3}x + \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{2} = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3+1}{2} = 2$$

دو جواب داریم:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

راه دوم:

ب) راه اول:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}u^2 - \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{13}u + \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{22} = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 22 = 169 - 88 = 81 > 0$$

$$u = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{13+9}{2} = 11$$

دو جواب داریم:

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{13-9}{2} = 2$$

$$u^2 - 13u + 22 = 0 \Rightarrow (u-11)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u-11=0 \Rightarrow u=11 \\ u-2=0 \Rightarrow u=2 \end{cases}$$

راه دوم:

پ) راه اول:

$$x^2 + 1 = 2x \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}x^2 - \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{2}x + \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{1} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

معادله ۱ جواب دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$$

$$x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

راه دوم:

آموزش و تمرین

استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادله

معادله‌هایی وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم هستند. در این قسمت از روش تغییر متغیر برای حل چنین معادله‌هایی استفاده می‌کنیم.

**تمرین:** معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$       ب)  $(x^2 - 1)^2 + 4(x^2 - 1) + 3 = 0$

☑ پاسخ:

الف) به جای عبارت  $x^2$  قرار می‌دهیم  $t$ ، یعنی  $t = x^2$ . به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2)^2 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{t=x^2} 2t^2 - 7t - 4 = 0$$

به یک معادله درجه دوم رسیدیم. آن را حل می‌کنیم.

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 49 + 32 = 81 > 0$$

معادله ۲ جواب دارد.

$$t = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{7+9}{4} = 4 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$t = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{7-9}{4} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{t=x^2} \underset{\text{منفی}}{x^2} = \underset{\text{نامنفی}}{-\frac{1}{2}} \times$$

معادله جواب ندارد.

ب) قرار می‌دهیم  $t = x^2 - 1$

$$(x^2 - 1)^2 + 4(x^2 - 1) + 3 = 0 \xrightarrow{t=x^2-1} t^2 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t+1) = 0$$

$$\begin{cases} t+3=0 \Rightarrow t=-3 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2-1=-3 \Rightarrow \underset{\text{منفی}}{x^2} = \underset{\text{نامنفی}}{-2} \times \\ t+1=0 \Rightarrow t=-1 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$



## مثال و پاسخ

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} - 2 = 0$

ب)  $4x^6 + 1 = 5x^3$

پ)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

پاسخ:

الف)

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^6}\right)^2 + \frac{1}{x^6} - 2 = 0 \xrightarrow{t = \frac{1}{x^6}} t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+2=0 \Rightarrow t=-2 \xrightarrow{t=\frac{1}{x^6}} \frac{1}{x^6} = -2 \text{ (منفی ناممکن)} \\ t-1=0 \Rightarrow t=1 \xrightarrow{t=\frac{1}{x^6}} \frac{1}{x^6} = 1 \Rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

ب)

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \Rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 4(x^3)^2 - 5x^3 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t=x^3} 4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 > 0 \text{ معادله دو جواب دارد.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 4} = \frac{5+3}{8} = 1 \xrightarrow{t=x^3} x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ t = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 4} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \xrightarrow{t=x^3} x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

پ)

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow (t-4)(t-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-4=0 \Rightarrow t=4 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \\ t-9=0 \Rightarrow t=9 \xrightarrow{t=x^2} x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3} \end{cases}$$

آموزش و تمرین

تشکیل معادله درجه دوم - مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \text{جمع ریشه‌ها} = S &= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \text{ضرب ریشه‌ها} = P &= \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

**تمرین (۱):** بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $12x^2 - 9x - 6 = 0$  را به دست آورید.

✓ پاسخ:

$$a = 12, b = -9, c = -6$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{12} = \frac{3}{4}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

**نکته:** معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌های آن  $P$  باشد به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.

**تمرین (۲):** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۲ و ۳ باشد.

✓ پاسخ:

جمع و ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم و در رابطه  $x^2 - Sx + P = 0$  جایگذاری می‌کنیم:

$$S = 2 + 3 = 5, \quad P = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow \frac{S=5}{P=6} \rightarrow \boxed{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

**تمرین (۳):** دو عدد بیابید که جمعشان ۳ و حاصل ضربشان -۲۸ باشد.

✓ پاسخ:

با توجه به صورت مسأله  $S = 3$  و  $P = -28$ .  $P$  و  $S$  را در معادله درجه دوم  $x^2 - Sx + P = 0$  جایگذاری می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 7} \\ x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

۷ و -۴ پاسخ مسأله هستند.

## مثال و پاسخ

مثال (۱): بدون حل معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $3x^2 + 5x - 10 = 0$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$3x^2 + 5x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = -10 \end{cases}, \quad \begin{aligned} S &= \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3} \\ P &= \frac{c}{a} = \frac{-10}{3} \end{aligned}$$

مثال (۲): در معادله  $x^2 - 4x + 2d = 0$  مقدار  $d$  را طوری بیابید که یکی از ریشه‌ها سه برابر دیگری باشد.

پاسخ:  اگر  $\alpha$  یکی از ریشه‌ها باشد، ریشه دیگری به صورت  $\beta = 3\alpha$  است. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها داریم:

$$S = \alpha + \beta = \alpha + 3\alpha = 4\alpha = \frac{-b}{a} \Rightarrow 4\alpha = \frac{-(-4)}{1} \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = 3\alpha \xrightarrow{\alpha=1} \beta = 3 \times 1 = 3 \Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 1 \times 3 = \frac{2d}{1} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

مثال (۳): معادله درجه دومی بنویسید که  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  ریشه‌های آن باشد.

پاسخ:  جمع و ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم و با استفاده از آن‌ها معادله درجه دوم را می‌نویسیم:

$$S = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$P = \underbrace{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{3^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

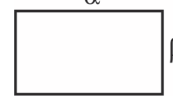
$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\substack{S=3 \\ P=1}} \boxed{x^2 - 3x + 1 = 0}$$

مثال (۴): طول و عرض مستطیلی با مساحت  $42 \text{ cm}^2$  و محیط  $26 \text{ cm}$  را بیابید.

پاسخ:  فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  طول و عرض مستطیل باشند.

$$\text{مساحت} = \alpha \times \beta = 42 \Rightarrow P = 42$$

$$\text{محیط} = 2(\alpha + \beta) = 26 \Rightarrow \alpha + \beta = 13 \Rightarrow S = 13$$



$S$  و  $P$  را در معادله درجه دوم جایگذاری و معادله را حل می‌کنیم.

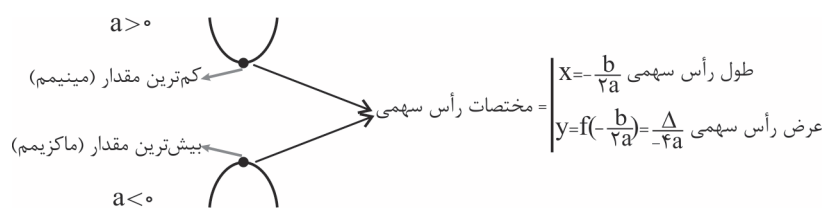
$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\substack{S=13 \\ P=42}} x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x=6 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

بنابراین  $\alpha = 7$  (طول) و  $\beta = 6$  (عرض) است.

## آموزش و تمرین

## سهمی

سهمی با ضابطه  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر بگیرید. طول رأس سهمی برابر  $x = \frac{-b}{2a}$  است. برای به دست آوردن عرض رأس سهمی  $x = \frac{-b}{2a}$  را در ضابطه سهمی قرار می‌دهیم تا عرض رأس سهمی به دست بیاید. نمودار سهمی با توجه به علامت  $a$  به یکی از صورت‌های زیر است.



**نکته:** برای یافتن کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار سهمی طول رأس سهمی را در رابطه سهمی قرار می‌دهیم.

**تمرین (۱):** بیش‌ترین مقدار سهمی  $y = -2x^2 + 8x - 1$  را مشخص کنید.

✓ **پاسخ:** ابتدا طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$$y = -2x^2 + 8x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-2)} = 2$$

حال طول رأس سهمی را در رابطه سهمی قرار می‌دهیم.

$$y = -2 \times (2)^2 + 8 \times 2 - 1 = -8 + 16 - 1 = 7 \text{ بیش‌ترین مقدار}$$

**تمرین (۲):** کم‌ترین مقدار سهمی  $y = x^2 + 2x + 3$  را به دست آورید.

✓ **پاسخ:**

$$y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = -1$$


$$\Rightarrow y = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2 \text{ کم‌ترین مقدار}$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): ابتدا مشخص کنید هر یک از سهمی‌ها ماکزیمم دارند یا مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم را به دست آورید.

الف)  $y = -x^2 - 2x - 3$       ب)  $y = (x+1)^2 - 1$


پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم} \\ b = -2 \\ c = -3 \end{array} \right.$$


$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times (-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y = -(-1)^2 - 2(-1) - 3 = -1 + 2 - 3 = -2$$
 ماکزیمم  $-2$

ب) ابتدا سهمی را ساده می‌کنیم:

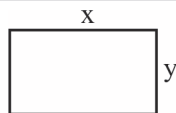
$$y = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \text{مینیمم} \\ b = 4 \\ c = 3 \end{array} \right.$$


$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
 مینیمم  $-1$

مثال (۲): محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

پاسخ:



با توجه به این که محیط مستطیل ۱۰۰ متر است، داریم:

$$\text{محیط} = P = 2(x+y) = 100 \Rightarrow x+y = 50 \Rightarrow y = 50-x \quad (1)$$

رابطه مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$\text{مساحت} = S = xy \Rightarrow x(50-x) = 50x - x^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 50 \\ c = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

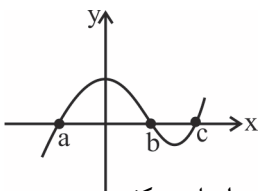
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \times (-1)} = \frac{-50}{-2} = 25 \text{ m}$$
 طول و عرض مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) \quad y = 50 - 25 = 25 \text{ m}$$
 عرض  $25 \text{ m}$       مساحت  $S = 25 \times 25 = 625 \text{ m}^2$

آموزش و تمرین

صفرهای یک تابع

نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور  $x$  ها را، صفرهای تابع می‌نامند، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.



در نمودار مقابل نقاط  $a$ ،  $b$  و  $c$  صفرهای تابع هستند.

**نکته:** برای محاسبه صفرهای تابع  $f$ ، تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

**تمرین (۱):** صفر تابع  $y = x + 6$  را به دست آورید.

✓ پاسخ:

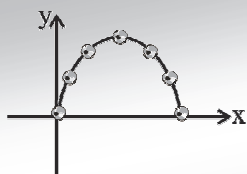
$$y = 0 \Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -6}$$

**تمرین (۲):** صفرهای تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + 2x$  را بیابید.

✓ پاسخ:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = -2} \end{cases}$$

**تمرین (۳):** فوتبالیستی توپی را شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل



مقابل است که تابع مسیر آن به صورت  $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$  می‌باشد. نقطه برخورد توپ با زمین را به دست آورید.

✓ پاسخ:

هنگامی که توپ با زمین برخورد می‌کند  $y = 0$ ، پس:

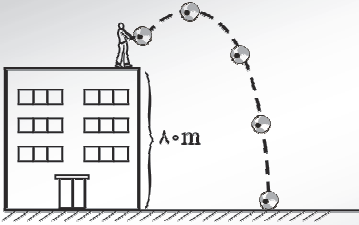
$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{40}x^2 + x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{40}x + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{غیرقابل قبول } x = 0 \\ \text{قابل قبول } -\frac{1}{40}x + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{40}x = -1 \Rightarrow x = 40 \text{ m} \end{cases}$$

مثال و پاسخ

**مثال:** شخصی که در لبه فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است، توپی را با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از  $t$  ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است با  $h = -5t^2 + 30t + 80$ . با توجه به شکل مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟  
 (ب) توپ پس از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟  
 (پ) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟



پاسخ:

(الف) هنگامی که توپ به زمین برخورد می‌کند  $h = 0$ . پس:

$$h = 0 \Rightarrow -5t^2 + 30t + 80 = 0 \Rightarrow -5(t^2 - 6t - 16) = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0 \Rightarrow (t - 8)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 8 = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ قابل قبول} \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

(ب)

$$h = -5t + 30t + 80 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 30 \\ c = 80 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \times (-5)} = 3 \text{ ثانیه}$$

(پ)

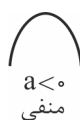
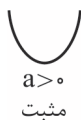
$$h = -5t^2 + 30t + 80 \xrightarrow{t=3} h = -5 \times 3^2 + 30 \times 3 + 80 = -45 + 90 + 80 = 125 \text{ متر}$$



آموزش و تمرین

تعیین علامت  $a, b, c$  در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$

۱- تعیین علامت  $a$ : اگر سهمی رو به بالا باز شود علامت  $a$ ، مثبت و اگر رو به پایین باز شود علامت  $a$  منفی است.

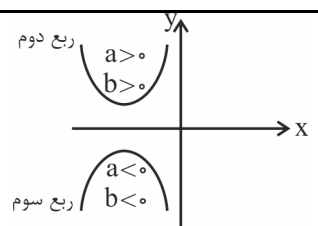
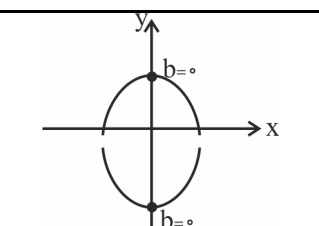
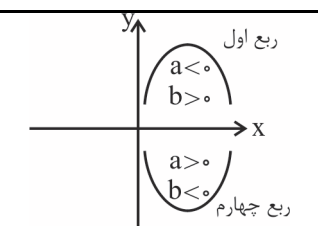


۲- تعیین علامت  $b$ : برای تعیین علامت  $b$  دو نکته قابل توجه است:

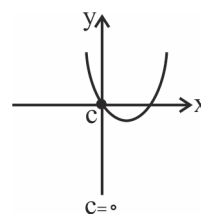
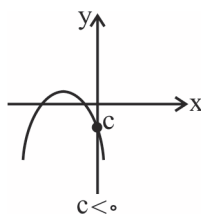
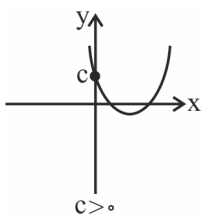
۱- سهمی رو به بالا است یا رو به پایین.

۲- رأس سهمی در کدام ربع قرار دارد.

حال با استفاده از جدول زیر می‌توان علامت  $b$  را تعیین کرد.

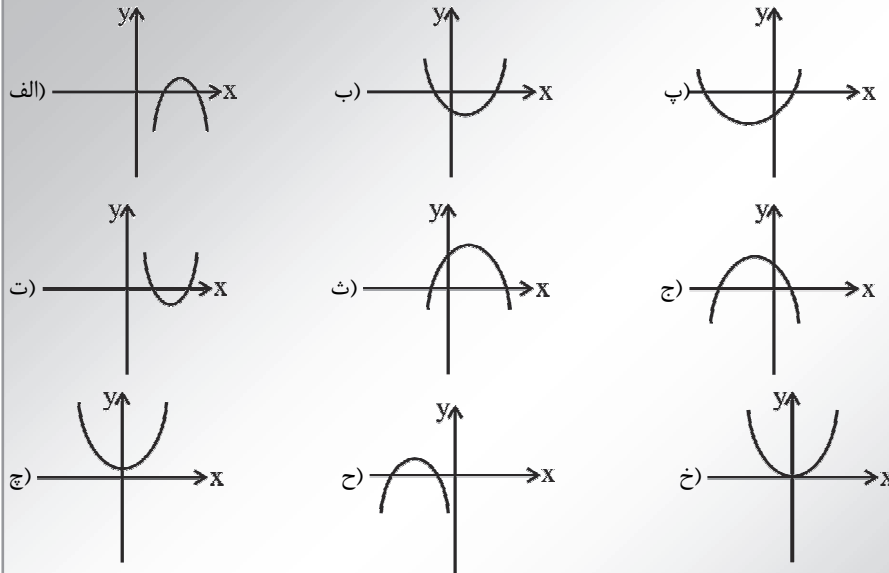
اگر رأس سهمی در ربع دوم یا سوم یا مرز میان آن‌ها باشد علامت $b$ موافق علامت $a$ است.	اگر رأس سهمی روی محور عرض‌ها باشد $b$ برابر صفر است.	اگر رأس سهمی در ربع اول یا چهارم یا مرز میان آن‌ها باشد علامت $b$ مخالف علامت $a$ است.
		

۳- تعیین علامت  $c$ : همان محل برخورد سهمی با محور عرض‌هاست، پس:



مثال و پاسخ

مثال: با توجه به نمودار سهمی‌های داده شده جدول را کامل کنید.



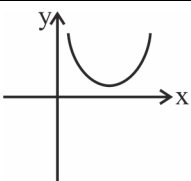
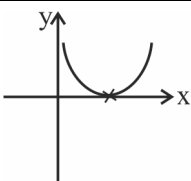
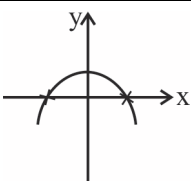
تابع ویژگی	الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ
علامت a									
علامت b									
علامت c									

پاسخ:

تابع ویژگی	الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ
علامت a	-	+	+	+	-	-	+	-	+
علامت b	+	-	+	-	+	-	0	-	0
علامت c	-	-	-	+	+	+	+	-	0

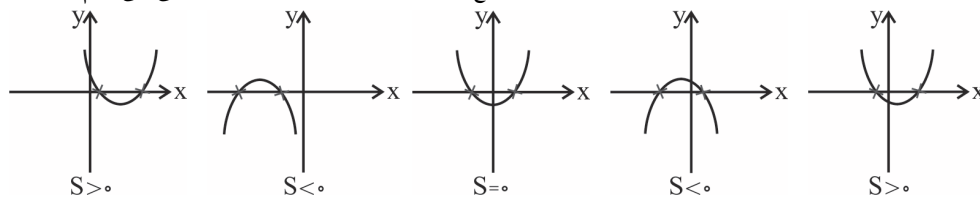
## آموزش و تمرین

تعیین علامت  $\Delta$ ,  $S$ ,  $P$ ۱- تعیین علامت  $\Delta$ :

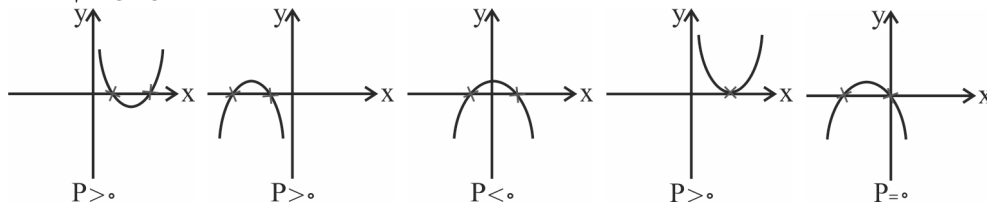
اگر نمودار سهمی محور $x$ ها را قطع نکند $\Delta < 0$	اگر نمودار سهمی در یک نقطه بر محور $x$ ها مماس شود $\Delta = 0$	اگر نمودار سهمی در دو نقطه محور $x$ ها را قطع کند $\Delta > 0$
 بدون ریشه $\Delta < 0$	 ریشه مضاعف $\Delta = 0$	 ۲ ریشه متفاوت $\Delta > 0$

۲- تعیین علامت  $S$ :

با توجه به نمودار در صورت وجود، علامت حاصل جمع ریشه‌ها را به صورت زیر بررسی می‌کنیم.

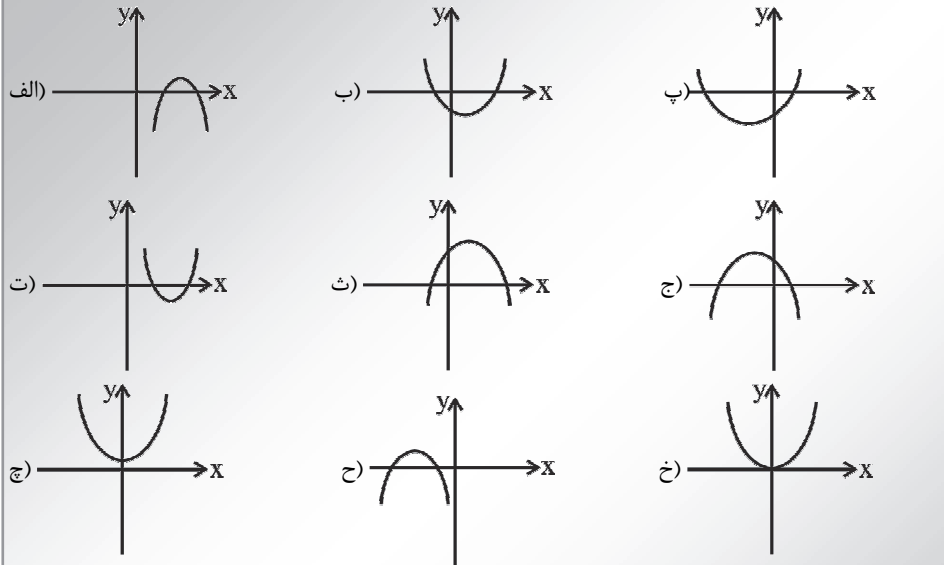
۳- تعیین علامت  $P$ :

با توجه به نمودار در صورت وجود، علامت حاصل ضرب ریشه‌ها را به صورت زیر بررسی می‌کنیم.



مثال و پاسخ

مثال: با توجه به نمودار سهمی‌های داده شده جدول را کامل کنید.



ویژگی	تابع	الف	ب	پ	ت	ث	ج	ج	ح	خ
تعداد ریشه‌های متمایز										
علامت $\Delta$										
علامت S										
علامت ریشه یا ریشه‌ها در صورت وجود										
علامت P										

پاسخ:

ویژگی	تابع	الف	ب	پ	ت	ث	ج	ج	ح	خ
تعداد ریشه‌های متمایز		۲	۲	۲	۲	۲	۲	۰	۲	۱
علامت $\Delta$		+	+	+	+	+	+	-	+	۰
علامت S		+	+	-	+	+	-	غیر قابل بررسی	-	۰
علامت ریشه یا ریشه‌ها در صورت وجود		هر دو	یکی + یکی -	یکی + یکی -	هر دو	یکی + یکی -	یکی + یکی -	غیر قابل بررسی	هر دو	۰
علامت P		+	-	-	+	-	-	غیر قابل بررسی	+	۰

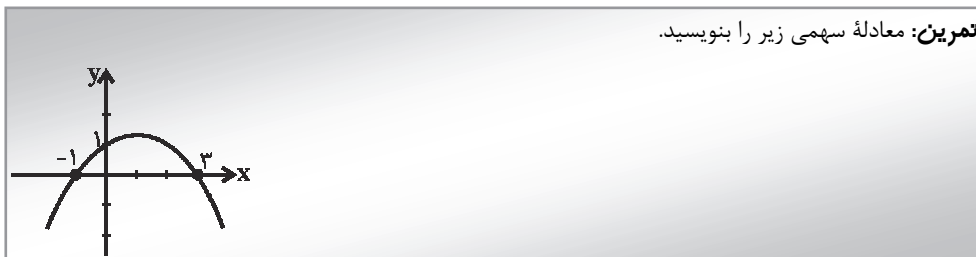
## آموزش و تمرین

## نوشتن معادله سهمی از روی نمودار

در برخی از سؤالات نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  داده شده است و با توجه به نمودار باید مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را بیابیم.

**نکته:** با توجه به این که محل برخورد نمودار سهمی با محور  $y$  ها همان  $c$  است، در بسیاری از موارد ابتدا مقدار  $c$  را به دست می آوریم.

**تمرین:** معادله سهمی زیر را بنویسید.



☑ پاسخ:

با توجه به نمودار  $f(0) = 1$ ، پس  $c = 1$ ؛ لذا:  $f(x) = ax^2 + bx + 1$ .

$$(-1, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 1 = a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = -1$$

$$(3, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(3) = a \times 3^2 + b \times 3 + 1 = 9a + 3b + 1 = 0 \Rightarrow 9a + 3b = -1$$

با حل دستگاه مقدار  $a$  و  $b$  را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 3a - 3b = -3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases}$$

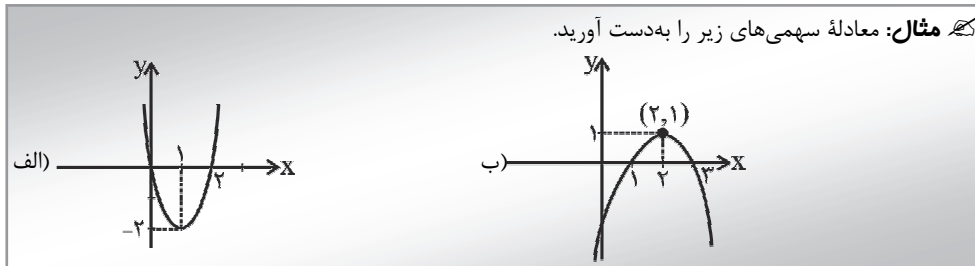
$$12a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{a = -\frac{1}{3}} -\frac{1}{3} - b = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 = b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

پس معادله سهمی به صورت زیر است.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$

## مثال و پاسخ



پاسخ: الف) با توجه به نمودار  $f(0) = 0$  پس  $c = 0$ ، لذا  $f(x) = ax^2 + bx$

$$(1, -2) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(1) = a \times 1^2 + b \times (1) = a + b = -2$$

$$(2, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 = 4a + 2b = 0$$

با حل دستگاه مقدار  $a$  و  $b$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2a = -4}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=-2} 2 + b = -2 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x$$

ب) نقاط  $(1, 0)$  و  $(3, 0)$  روی سهمی و  $x = 2$  طول رأس سهمی است پس:

$$\text{طول رأس سهمی} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 4a = -b \Rightarrow b = -4a \quad (I)$$

$$(1, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(1) = a \times (1)^2 + b \times 1 + c = a + b + c = 0 \quad (II)$$

$$(2, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b + c = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \quad (III)$$

با قرار دادن رابطه (I) در دو رابطه (II) و (III) داریم:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a - 4a + c = 0 \Rightarrow -3a + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 1 \Rightarrow 4a + 2 \times (-4a) + c = 1 \Rightarrow 4a - 8a + c = 1 \Rightarrow -4a + c = 1$$

با حل دستگاه  $a$  و  $c$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, c = -3$$

و با توجه به (I)،  $b = 4$ ، پس  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

## سؤالات تشریحی درس دوم

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $7x^2 - 8x + 1 = 0$

ب)  $(x + \frac{1}{x})^2 + 2(x + \frac{1}{x}) = 8$

۲- معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) جواب‌های آن ۳- و ۴ باشند.

ب) جواب‌های آن  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{3}{4}$  باشند.

پ) جواب‌های آن  $3 + \sqrt{2}$  و  $3 - \sqrt{2}$  باشند.

۳- ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = 4 + 8x - x^2$

ب)  $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴- توپی که به صورت عمودی پرتاب کرده‌ایم،  $t$  ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع  $h$  متری از سطح زمین قرار دارد، که

$$h(t) = 8t - \frac{4}{5}t^2, (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد توپ به بالاترین ارتفاع خود برسد؟

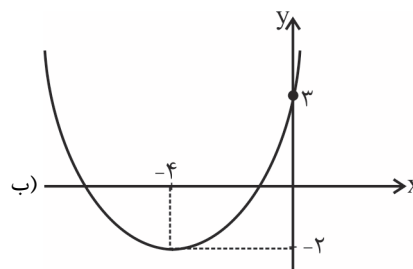
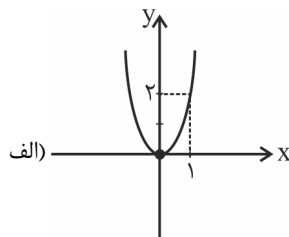
ب) بیش‌ترین ارتفاع توپ چقدر است؟

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، توپ با زمین برخورد می‌کند؟

۵- محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۰ متر و مساحت آن ۹ مترمربع است. اندازه طول و عرض این زمین مستطیل

شکل را به دست آورید.

۶- در تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در هر یک از حالت‌های زیر ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.



## پاسخ سوالات تشریحی درس دوم

-۱

$$7x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -8 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

معادله ۲ جواب دارد.  $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 7 \times 1 = 64 - 28 = 36 > 0$ 

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{36}}{2 \times 7} = \frac{8 + 6}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{36}}{2 \times 7} = \frac{8 - 6}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

$$t = x + \frac{1}{x} \quad \text{ب) قرار می‌دهیم}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8 \xrightarrow{t = x + \frac{1}{x}} t^2 + 2t = 8$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t + 4)(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t + 4 = 0 \Rightarrow t = -4 \\ t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$t = -4 \xrightarrow{t = x + \frac{1}{x}} x + \frac{1}{x} = -4 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = -4x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4, \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12 > 0. \text{ معادله ۲ جواب دارد.} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2}$$

$$t = 2 \xrightarrow{t = x + \frac{1}{x}} x + \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

-۲

در هر یک از قسمت‌ها ابتدا S و P را به دست می‌آوریم و بعد آن‌ها را در رابطه  $x^2 - Sx + P = 0$  قرار می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } S = \alpha + \beta = 4 - 3 = 1 \\ P = \alpha\beta = 4 \times (-3) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - x - 12 = 0}$$



$$\left. \begin{aligned} \text{ب) } S = \alpha + \beta &= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12} \\ P = \alpha\beta &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - \frac{13}{12}x + \frac{1}{4} = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{پ) } S = \alpha + \beta &= 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6 \\ P = \alpha\beta &= \underbrace{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 9 - 2 = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - 6x + 7 = 0}$$

-۳

$$\text{الف) } f(x) = 4 + 8x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم} \\ b = 8 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$f(4) = 4 + 8 \times 4 - 4^2 = 4 + 32 - 16 = 20 \Rightarrow f \text{ ماکزیمم} = 20$$

$$\text{ب) } g(x) = 3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم} \\ b = 6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times 3} = -1$$

$$g(-1) = 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2 \Rightarrow g \text{ مینیمم} = 2$$

-۴

$$\text{الف) } h(t) = 8t - \frac{4}{5}t^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-\frac{4}{5})} = \frac{-8}{-\frac{8}{5}} = 5 \Rightarrow t = 5$$

ب) باید بینیم توپ در ثانیه ۵ام در چه ارتفاعی قرار دارد.

$$h(5) = 8 \times 5 - \frac{4}{5} \times 5^2 = 40 - 20 = 20 \text{ m} \Rightarrow \text{بیشترین ارتفاع} = 20 \text{ m}$$

$$\text{پ) } h(t) = 0 \Rightarrow 8t - \frac{4}{5}t^2 = 0 \Rightarrow t(8 - \frac{4}{5}t) = 0$$



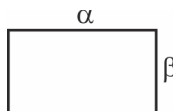
پس از  $10^\circ$  ثانیه توپ به زمین می‌خورد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{غیر قابل قبول } t = 0 \\ 8 - \frac{4}{5}t = 0 \Rightarrow 8 = \frac{4}{5}t \Rightarrow t = \frac{8 \times 5}{4} = 10 \end{cases}$$

-۵

$$2(\alpha + \beta) = 20 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \Rightarrow S = 10$$

$$\text{مساحت} = \alpha\beta = 9 \Rightarrow P = 9$$



$S$  و  $P$  را در معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$

لذا طول مستطیل برابر ۹ متر و عرض آن ۱ متر می‌باشد.

-۶

الف) ابتدا  $c$  را به دست می‌آوریم:  $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ ، پس  $f(x) = ax^2 + bx$

$$x = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

طول رأس سهمی برابر صفر است، پس:

لذا  $f(x) = ax^2$ . نقطه  $(1, 2)$  روی سهمی قرار دارد.

$$(1, 2) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(1) = a \times (1)^2 = a = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$a = 2, b = 0, c = 0$$

بنابراین:

$$f(0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3$$

ب) ابتدا  $c$  را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = -4 \Rightarrow -8a = -b \Rightarrow 8a - b = 0 \quad (I)$$

طول رأس سهمی برابر  $-4$  است. پس:

نقطه  $(-4, 2)$  روی سهمی قرار دارد، پس:

$$(-4, 2) \in \text{سهمی} \Rightarrow f(-4) = a \times (-4)^2 + b \times (-4) + 3 = 16a - 4b + 3 = -2 \Rightarrow 16a - 4b = -5 \quad (II)$$

(I) و (II) را در دستگاه قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 8a - b = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - b = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 8a - b = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$$

$$-2b = -5 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$8a - b = 0 \Rightarrow 8a = b \Rightarrow 8a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{16}$$

$$a = \frac{5}{16}, b = \frac{5}{2}, c = 3$$

بنابراین:

## کاربرد تمرینی دانش آموز درس دوم

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $4x^2 - 22x + 1 = 0$

ب)  $(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) + 1 = 0$

پ)  $3x^{\frac{2}{5}} - 2x^{\frac{1}{5}} - 1 = 0$

ت)  $(x - \frac{1}{x})^2 - 8(x - \frac{1}{x}) = 0$

۲- مقدار  $m$  را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله  $2x^2 - (m+1)x - 3 = 0$  برابر ۸ باشد.

۳- معادله درجه دومی بنویسید که:

الف)  $\frac{3}{4}$  و  $-\frac{4}{7}$  ریشه‌هایش باشند.

ب)  $\frac{\sqrt{2}+4}{5}$  و  $\frac{\sqrt{2}-4}{5}$  ریشه‌هایش باشند.

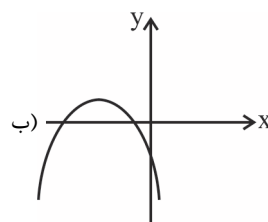
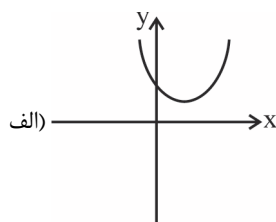
۴- بدون حل معادله  $5x^2 + 10x - 3 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را بیابید.

۵- ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را بیابید.

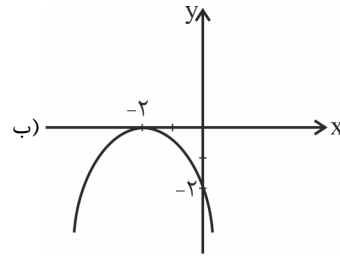
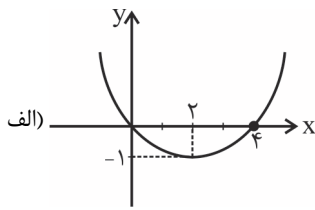
الف)  $f(x) = 8x^2 - 16x + 3$

ب)  $g(x) = 4 + x^2 - 3x$

۶- نمودار  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. در هر مورد علامت  $a, b, c, P, S, \Delta$  را مشخص کنید.



۷- در تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در هر یک از حالت‌های زیر، ضرایب  $a, b, c$  را تعیین کنید.



۸- مقدار  $m$  را چنان بیابید که نقطه  $x = -2$  نقطهٔ ماکزیمم تابع  $f(x) = -4x^2 - (m+1)x - 1$  باشد.

۹- دو عدد مثبت بیابید که مجموع آن‌ها  $40$  و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

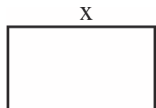
۱۰- صفرهای توابع  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  و  $g(x) = x^3 - x$  را به دست آورید.

۱۱- بدون حل معادله  $3x^2 - 5x - 1 = 0$  دربارهٔ وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

## آموزش و تمرین

## درس سوم: معادله گویا

مستطیلی با طول  $x$  و عرض  $y$  را در نظر بگیرید. اگر  $x$  و  $y$  در معادله  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$  صدق کند، نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند.



**توجه:** عدد  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  را عدد طلایی می‌گویند و مقدار آن تقریباً  $1/618$  است.

**معادله گویا:** معادله‌هایی که مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای)

$$\frac{2}{x} + \frac{x}{x-1} = 3$$

قرار دارد را معادله گویا می‌نامیم، مانند:

**روش حل معادله گویا:**

- ۱- مخرج کسرها را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم.
- ۲- ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) مخرج‌ها را به دست می‌آوریم.
- ۳- دو طرف تساوی را در ک.م.م ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.
- ۴- معادله را حل می‌کنیم.

۵- جوابی قابل قبول است که مخرج هیچ‌یک از کسرهای اولیه را صفر نکند و در معادله اولیه صدق کند.

**تمرین (۱):** ریشه‌های معادله  $\frac{60}{x-10} = \frac{60}{x} + \frac{1}{2}$  را به دست آورید.

✓ **پاسخ:** ک.م.م مخرج‌ها عبارت است از  $2x(x-10)$ . طرفین تساوی را در ک.م.م ضرب می‌کنیم:

$$2x(x-10)\left(\frac{60}{x-10}\right) = 2x(x-10)\left(\frac{60}{x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 60 \times 2x = 2(x-10) \times 60 + x(x-10) \times 1 \Rightarrow 120x = 120x - 1200 + x^2 - 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0 \Rightarrow (x-40)(x+30) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-40=0 \Rightarrow x=40 \\ x+30=0 \Rightarrow x=-30 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا مخرج معادله اولیه را صفر نمی‌کنند و در معادله صدق می‌کنند.

**نکته:** یک کسر هنگامی برابر صفر است که صورتش صفر شود.

**تمرین (۲):** معادله  $\frac{4-x}{x^2+2x} = 0$  را حل کنید.

✓ **پاسخ:** طبق نکته فوق:

$$\frac{4-x}{x^2+2x} = 0 \Rightarrow 4-x=0 \Rightarrow \boxed{4=x}$$
 قابل قبول

## مثال و پاسخ

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0 \quad \text{ب) } \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4} \quad \text{پ) } \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

پاسخ:

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0 \Rightarrow x^2 \left( \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} \right) = x^2 \times 0$$

$$3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow -12x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = \frac{-3}{-12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

$$\text{ب) } \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4} \Rightarrow \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m+4}{(m+2)(m-2)}$$

$$\frac{3}{m(m+2)(m-2)} + \frac{2}{m(m+2)(m-2)} = \frac{4m+4}{m(m+2)(m-2)}$$

$$3m(m-2) + 2(m+2)(m-2) = m(4m+4)$$

$$\Rightarrow 3m^2 - 6m + 2(m^2 - 4) = 4m^2 + 4m$$

$$\Rightarrow 3m^2 - 6m + 2m^2 - 8 = 4m^2 + 4m \Rightarrow 3m^2 + 2m^2 - 4m^2 - 6m + 4m - 8 = 0$$

$$m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-4=0 \Rightarrow m=4 \text{ قابل قبول} \\ m+2=0 \Rightarrow m=-2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

 $m = -2$  غیر قابل قبول است چون مخرج معادله اصلی را صفر می‌کند.

$$\text{پ) } \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4} \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

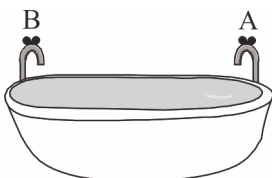
$$(x-2)(x-2) - x(x+2) = 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 - 2x = 8$$

$$\Rightarrow -6x = 8 - 4 \Rightarrow -6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

 جواب  $x = -\frac{2}{3}$  قابل قبول است.

## آموزش و تمرین

## کاربرد معادله گویا



- فرض کنید دو شیر A و B در یک حوض باشند، اگر شیر A به تنهایی باز باشد حوض در  $a$  ساعت و اگر شیر B به تنهایی باز باشد حوض در  $b$  ساعت پر شود. می‌خواهیم بدانیم اگر هر دو شیر همزمان باز باشند چقدر زمان می‌برد تا حوض پر شود. فرض کنیم اگر هر دو شیر باز باشند  $x$  ساعت زمان می‌برد تا حوض پر شود. در این صورت  $x$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{یا} \quad x = \frac{ab}{a+b}$$

**تمرین (۱):** دو شیر در یک حوض آب باز می‌شوند. اگر شیر اول به تنهایی در حوض باز شود، حوض در ۲ ساعت و اگر شیر دوم به تنهایی باز شود، حوض در ۳ ساعت پر می‌شود. اگر هر دو شیر با هم باز شوند، چقدر طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

✓ پاسخ:

$$a = 2 \text{ ساعت}, \quad b = 3 \text{ ساعت} \Rightarrow x = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ ساعت} = 72 \text{ دقیقه}$$

**تمرین (۲):** در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به علت تازه کار بودن کارگراها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چقدر نمک به این محلول اضافه کنیم تا آب نمک ۷ درصدی درست شود؟

✓ پاسخ:

ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ کیلو}$$

اگر  $x$  کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب موجود در  $8 + x$  کیلوگرم و وزن کل محلول  $200 + x$  کیلو می‌شود. پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100} \Rightarrow 100 \times (200+x) \left( \frac{8+x}{200+x} \right) = 100 \times (200+x) \left( \frac{7}{100} \right)$$

$$\Rightarrow 100(8+x) = (200+x) \times 7 \Rightarrow 800 + 100x = 1400 + 7x$$

$$100x - 7x = 1400 - 800 \Rightarrow 93x = 600 \Rightarrow x = \frac{600}{93} \approx 6.452$$

یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۲ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.

مثال و پاسخ

**مثال (۱):** اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این که سرعت یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ:

$$x = 4, \quad a = 2b \quad (I)$$

$$x = \frac{a \times b}{a + b} \Rightarrow 4 = \frac{2b \times b}{2b + b} \Rightarrow 4 = \frac{2b^2}{3b} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{2b}{3}$$

$$3 \times 4 = 2b \Rightarrow b = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow a = 2b = 2 \times 6 = 12 \quad (I)$$

**مثال (۲):** قطاری مسیر ۶۰ کیلومتری میان دو شهر را با سرعت ثابت X کیلومتر در ساعت طی می‌کند. قطار مسیر برگشت را با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت کم‌تر از سرعت مسیر رفت طی می‌کند و نیم ساعت دیرتر به مقصد می‌رسد. مطلوب است محاسبه مدت زمان رفت و برگشت قطار.

پاسخ:  ابتدا معادله مربوط به مسأله را می‌نویسیم و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x-10} + \frac{1}{2} \Rightarrow \overbrace{2x(x-10)}^{\text{مدت زمان رفت}} \left( \frac{60}{x} \right) = \overbrace{2x(x-10)}^{\text{مدت زمان برگشت}} \left( \frac{60}{x-10} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 120(x-10) = 120x + x(x-10) \Rightarrow 120x - 1200 = 120x + x^2 - 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 1200 = 0 \Rightarrow (x-40)(x+30) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 & \text{قابل قبول} \\ x = -30 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین مدت زمان رفت و برگشت به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\text{ساعت} = \frac{60}{40} = 1/5 = \text{مدت زمان رفت}$$

$$\text{ساعت} = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2 = \text{مدت زمان برگشت}$$



## آموزش و تمرین

## معادله رادیکالی

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود داشته باشد را معادله رادیکالی گویند. معادله زیر نمونه‌ای از معادله رادیکالی است.

$$\sqrt{x+2} - 4 = 0$$

روش حل معادله رادیکالی:

- ۱- عبارت رادیکالی را به تنهایی در یک طرف تساوی می‌نویسیم.
- ۲- دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم تا معادله از حالت رادیکالی خارج شود.
- ۳- معادله را حل می‌کنیم.
- ۴- جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم تا در معادله صدق کند.

**تمرین (۱):** معادله‌های زیر را حل کنید. آیا همه جواب‌های حاصل قابل قبول‌اند؟

الف)  $\sqrt{x-2} - 4 = 0$

ب)  $x - \sqrt{x+2} = 4$

پاسخ:

الف) قابل قبول  $x = 18$   $\Rightarrow x - 2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 4$  — توان ۲  $\Rightarrow \sqrt{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 4$

ب)  $x - \sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow x - 4 = \sqrt{x+2}$  — توان ۲  $\Rightarrow (x-4)^2 = (\sqrt{x+2})^2$

$x^2 - 8x + 16 = x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x - x + 16 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$(x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غیرقابل قبول } x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \\ \text{قابل قبول } x = 7 \Rightarrow x - 7 = 0 \end{cases}$

$x = 2$  غیرقابل قبول است زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند.

$x = 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{2+2} = 2 - 2 = 0 \neq 4$

**تمرین (۲):** بدون حل معادله توضیح دهید چرا معادله  $\sqrt{2x-3} + 3 = 0$  ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ:

۳ مثبت و  $\sqrt{2x-3}$  نامنفی است و جمع این دو عبارت هیچگاه صفر نمی‌شود لذا معادله جواب ندارد.

## مثال و پاسخ

 ✍ **مثال:** معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $15 + \sqrt{2x + 80} = 25$

ب)  $2\sqrt{x} = \sqrt{3x + 4}$

پ)  $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

ت)  $\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u+3}} = 0$

 ✓ **پاسخ:**

$$\text{الف) } 15 + \sqrt{2x + 80} = 25 \Rightarrow \sqrt{2x + 80} = 25 - 15 \Rightarrow \sqrt{2x + 80} = 10$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x + 80 = 100 \Rightarrow 2x = 100 - 80 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

جواب به دست آمده را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$15 + \sqrt{2 \times 10 + 80} = 15 + \sqrt{100} = 15 + 10 = 25$$

 تساوی برقرار است و  $x = 10$  جواب معادله است.

$$\text{ب) } 2\sqrt{x} = \sqrt{3x + 4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x = 3x + 4 \Rightarrow x = 4$$

 جواب در معادله اصلی صدق می‌کند، پس  $x = 4$  جواب معادله است.

$$\text{پ) } 2\sqrt{2t-1} - t = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2t-1} = 1 + t \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2\sqrt{2t-1})^2 = (1+t)^2$$

$$4(2t-1) = 1 + 2t + t^2 \Rightarrow 8t - 4 = 1 + 2t + t^2 \Rightarrow 0 = t^2 + 2t - 8t + 1 + 4 \Rightarrow 0 = t^2 - 6t + 5$$

$$\Rightarrow (t-5)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-5=0 \Rightarrow t=5 \\ t-1=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند؛ لذا قابل قبول هستند.

$$\text{ت) } \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u+3}} = 0 \Rightarrow \sqrt{u} \times \sqrt{u+3} \left( \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u+3}} \right) = \sqrt{u} \times \sqrt{u+3} \times 0$$

$$\sqrt{u+3} - 2\sqrt{u} = 0 \Rightarrow \sqrt{u+3} = 2\sqrt{u} \xrightarrow{\text{توان ۲}} u+3 = 4u \Rightarrow 3u = 3 \Rightarrow u=1$$

 $u = 1$  در معادله صدق می‌کند، لذا قابل قبول است.

## آموزش و تمرین

## کاربرد معادله رادیکالی

برای به دست آوردن پاسخ برخی مسائل، نیاز به حل یک معادله رادیکالی داریم که در این قسمت با نمونه‌هایی از آن‌ها آشنا می‌شویم.

**تمرین (۱):** آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ شود؟

✓ پاسخ:

عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم:

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \xrightarrow{\text{توان } 2} (\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 - x = 0 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \longrightarrow 4 + \sqrt{4} = 6 \text{ قابل قبول} \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \longrightarrow 9 + \sqrt{9} = 12 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

لذا جواب  $x = 4$  قابل قبول است.

**تمرین (۲):** نقطه‌ای روی محور عرض‌ها بیابید که فاصله آن از نقطه  $P(3, -2)$  برابر ۵ باشد.

✓ پاسخ:

چون نقطه روی محور عرض‌هاست لذا مختصات آن به صورت  $A(0, y_A)$  است. فاصله نقطه  $A$  از  $P$  را به دست می‌آوریم:

$$AP = \sqrt{(0 - 3)^2 + (y_A - (-2))^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{9 + y_A^2 + 4y_A + 4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 25 = y_A^2 + 4y_A + 13 \Rightarrow y_A^2 + 4y_A - 12 = 0$$

$$(y_A + 6)(y_A - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_A + 6 = 0 \Rightarrow y_A = -6 \\ y_A - 2 = 0 \Rightarrow y_A = 2 \end{cases}$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند بنابراین نقاط مورد نظر  $(0, -6)$  و  $(0, 2)$  هستند.

## مثال و پاسخ

مثال (۱): آیا عددی وجود دارد که جذرش برابر با وارونش (معکوسش) باشد؟

پاسخ:

عدد مورد نظر را  $x$  قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x \times \sqrt{x} = x \times \frac{1}{x} \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 \times x = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$  در معادله صدق می‌کند، پس عدد مورد نظر  $x = 1$  است.

مثال (۲): معادله  $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{5}{2}$  را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2\sqrt{m}} 2\sqrt{m}(\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}}) = 2\sqrt{m} \times \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m} \times \sqrt{m} + 2 = 5\sqrt{m} \Rightarrow 2m + 2 = 5\sqrt{m} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4m^2 + 8m + 4 = 25m$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 17m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -17 \\ c = 4 \end{cases}$$

معادله دو جواب دارد.  $\Delta = b^2 - 4ac = (-17)^2 - 4 \times 4 \times 4 = 225 > 0$

$$m = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-17) - \sqrt{225}}{2 \times 4} = \frac{17 - 15}{8} = \frac{1}{4}$$

$$m = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-17) + \sqrt{225}}{2 \times 4} = \frac{17 + 15}{8} = 4$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند، پس  $m = 4$  و  $m = \frac{1}{4}$  قابل قبول هستند.

سؤالات تشریحی درس سوم

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{2x} = \sqrt{3x-1}$$

$$۲) k = \sqrt{6k-8}$$

$$۳) \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$۴) \frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2-7x+3}$$

$$۵) \frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x} = \frac{8x+3}{9-x^2}$$

$$۶) \sqrt{3+x} + \sqrt{2-x} = 0$$

۷- به ازای چه مقدار  $k$ ، معادله  $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$  دارای جواب  $t = -3$  است؟

## پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم

-۱

$$\sqrt{2x} = \sqrt{3x-1} \xrightarrow{\text{توان}^2} 2x^2 = 3x-1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

معادله دو جواب دارد.

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند لذا هر دو قابل قبول هستند.

-۲

$$k = \sqrt{6k-8} \xrightarrow{\text{توان}^2} k^2 = 6k-8 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-2=0 \Rightarrow k=2 \\ k-4=0 \Rightarrow k=4 \end{cases}$$

هر دو جواب در معادله صدق می‌کنند لذا هر دو قابل قبول هستند.

-۳

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2} \Rightarrow \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{x-2} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{(x+3) - (x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(2x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$x+3 - (x+2)(x+3) = (x-2)(2x-3) \Rightarrow x+3 - (x^2 + 5x + 6) = 2x^2 - 3x - 4x + 6$$

$$x+3 - x^2 - 5x - 6 = 2x^2 - 7x + 6 \Rightarrow 0 = 2x^2 + x^2 - 7x + 5x - x + 6 + 6 - 3$$

$$0 = 3x^2 - 3x + 9 \Rightarrow 3(x^2 - x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

معادله جواب ندارد زیرا  $\Delta < 0$ .

-۴

$$\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2-7x+3} \Rightarrow \frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{(2x-1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \overbrace{(x-3)(2x-1)}^{\substack{x \\ 1}} \left( \frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} \right) = \overbrace{(x-3)(2x-1)}^{\substack{\Delta x \\ (2x-1)(x-3)}} \\ \Rightarrow (2x-1)x - (x-3) \times 1 = \Delta x \Rightarrow 2x^2 - x - x + 3 = \Delta x \Rightarrow 2x^2 - 2x - \Delta x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

معادله دو جواب دارد.  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24 = -20 < 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{-20}}{2 \times 2} = \frac{2 + \sqrt{-20}}{4} = \frac{1 + \sqrt{-5}}{2}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{-20}}{2 \times 2} = \frac{2 - \sqrt{-20}}{4} = \frac{1 - \sqrt{-5}}{2}$$

هر دو جواب مخرج معادله اصلی را صفر می‌کنند، لذا قابل قبول نیستند.

-۵

$$\frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x} = \frac{8x+3}{9-x^2} \Rightarrow \frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x} = \frac{8x+3}{(3-x)(3+x)}$$

$$\overbrace{(3-x)(3+x)}^{\substack{3 \\ 4}} \left( \frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x} \right) = \overbrace{(3-x)(3+x)}^{\substack{8x+3 \\ (3-x)(3+x)}}$$

$$3(3+x) + 4(3-x) = 8x+3 \Rightarrow 9+3x+12-4x = 8x+3$$

$$9+12-3 = 8x+4x-3x \Rightarrow 18 = 9x \Rightarrow \boxed{x=2}$$

در معادله صدق می‌کند و مخرج را صفر نمی‌کند، لذا قابل قبول است.

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{2-x} = 0$$

نامنفی      نامنفی

-۶

برای این که مجموع دو عبارت نامنفی صفر شود باید هر کدام صفر باشند.

$$\sqrt{3+x} = 0 \Rightarrow 3+x = 0 \Rightarrow x = -3$$

پس

$$\sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$

هیچ کدام از این دو جوابها در معادله صدق نمی‌کنند پس معادله جواب ندارد.

-۷

در معادله  $t-3 = \frac{3t^2+k}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)-68}$  را قرار می‌دهیم و  $k$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)-68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32}$$

$$\Rightarrow 7 \times 32 = 8 \times (27+k) \Rightarrow 28 = 27+k \Rightarrow \boxed{k=1}$$

$k=1$  قابل قبول است.

## کاربرد تمرینی دانش آموز درس سوم

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{7-x} = -3$$

$$۲) \sqrt{2x^2 - x} = 2 - x$$

$$۳) \sqrt{x + \sqrt{x+2}} = \sqrt{2x}$$

$$۴) \sqrt{2x+7} + \sqrt{x+2} = 0$$

$$۵) \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2 - x}$$

$$۶) \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}$$

$$۷) \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = 2$$

$$۸) \frac{x}{x+5} = \frac{x}{x-2}$$

$$۹) \frac{x+1}{x} = x$$

$$۱۰) 2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

$$۱۱) \sqrt{2 + \sqrt{x+5}} = \sqrt{3-x}$$

$$۱۲) \frac{6x}{x^2 - 3} = 0$$

$$۱۳) \sqrt{x} \times \sqrt{x-3} = 2$$

$$۱۴) \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

۱۵- عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن باشد.

۱۶- نقطه‌ای روی محور  $x$  ها بیابید که فاصله آن از نقطه  $P(2,6)$  برابر  $10$  باشد.

۱۷- هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند فیش حقوقی کارگران یک کارخانه در  $4$  ساعت چاپ می‌شود. اگر

چاپگر قدیمی به تنهایی برای این کار،  $3$  ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در

این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهند؟



## تست‌های فصل اول

۱- دو ضلع مربع منطبق بر دو خط  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند. مساحت مربع کدام است؟ (سراسری ۹۲)

- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{25}{8}$  (۴)  $\frac{25}{4}$

۲- فاصله دو خط  $y = \sqrt{3}x + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟ (سراسری خارج ۸۸)

- (۱)  $2 - \sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3} - 1$  (۳)  $1 + \sqrt{3}$  (۴)  $2 + \sqrt{3}$

۳- دو ضلع مستطیل منطبق بر  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن  $A(8, 5)$  است. مساحت مستطیل را بیابید. (سراسری خارج ۹۰)

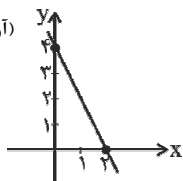
- (۱)  $7/2$  (۲)  $9/6$  (۳)  $10/4$  (۴)  $12/8$

۴- سه رأس مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

(آزاد ۸۰)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۵- شیب خط داده شده در نمودار زیر چقدر است؟ (آزاد خارج ۸۹)



- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) صفر

۶- خطی که از  $(-1, 0)$  و  $(0, 2)$  می‌گذرد خط  $y = x$  را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (آزاد ۸۴)

- (۱)  $(2, 2)$  (۲)  $(-2, -2)$  (۳)  $(1, 1)$  (۴)  $(-3, -3)$

(سنجش ۸۲)

۷- به ازای کدام مقدار  $m$  دو خط زیر موازیند؟

$$L_1: (m+1)x + my = 3$$

$$L_2: (1+3m)y = 5 - 3mx$$

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۸- نقاط  $A(1, -2)$ ،  $B(0, 1)$  و  $C(4, 7)$  رأس‌های یک مثلث هستند. اندازه ارتفاع  $AH$  کدام است؟ (سنجش ۸۲)

- (۱)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  (۲)  $\frac{7}{\sqrt{5}}$  (۳)  $\frac{7}{\sqrt{13}}$  (۴)  $\frac{9}{\sqrt{13}}$

۹- فاصله  $A(1, 1)$  از خط  $y + m^2x = 2m$  برابر  $\frac{4}{\sqrt{1+m^4}}$  است. مقدار مثبت  $m$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۰- در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ تا بیش‌تر است.  $m$  کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۱- به ازای کدام مقدار  $m$  یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - mx + 27 = 0$  مربع ریشه دیگر است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲



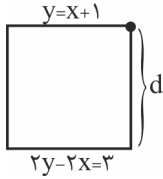
## پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل اول

✓ ۱- گزینه «۳»

ابتدا شیب و خط را محاسبه می‌کنیم:

$$2x - 2y = 3 \Rightarrow m = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$y = x + 1 \Rightarrow m = 1$$



دو خط موازی هستند پس دو ضلع روبه‌روی هم را داریم. نقطه‌ای دلخواه روی یکی از خط‌ها در نظر گرفته و فاصله آن را تا خط دیگر به دست می‌آوریم.

$$y = x + 1 \xrightarrow{x=0} y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

فاصله  $A(0, 1)$  از  $2x - 2y = 3$  طول ضلع را می‌دهد.

$$d = \frac{|2(0) - 2(1) - 3|}{\sqrt{4+4}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\text{مساحت مربع} = \frac{5}{\sqrt{8}} \times \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{25}{8}$$

✓ ۲- گزینه «۳»

قطعاً دو خط موازی هستند. کفایت روی یکی از خط‌ها نقطه‌ای بیابیم و فاصله آن را تا خط دیگر به دست آوریم.

$$y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 0 + 2 \Rightarrow y = 2$$

نقطه روی  $y = \sqrt{3}x + 2$  عبارت است از  $A(0, 2)$

$$L: \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{فاصله } A \text{ تا } L} \frac{|\sqrt{3}(2) - 3(0) + 6|}{\sqrt{9+3}} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{\sqrt{12}}$$

$$A(0, 2)$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

✓ ۳- گزینه «۲»

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$2y + x = 6 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$2x - y = 7 \Rightarrow m' = -\frac{2}{-1} = 2$$

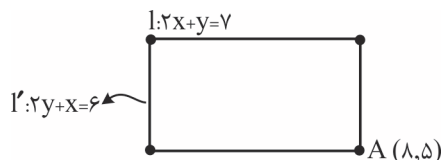
دو خط عمودند «چون شیب‌ها قرینه و معکوس‌اند.»

نقطه  $A(8, 5)$  روی هیچ‌کدام از خط‌ها نیست، زیرا در معادله هیچ‌یک از آن‌ها صدق نمی‌کند.

$$A(8, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2y + x = 6 \Rightarrow 2(5) + 8 = 6 \Rightarrow 18 = 6 \times \\ 2x - y = 7 \Rightarrow 2(8) - 5 = 7 \Rightarrow 11 = 7 \times \end{cases}$$

پس شکل به صورت مقابل است و از روی شکل

$A$  تا  $I$  یک ضلع و تا  $I'$  ضلع دیگر است.



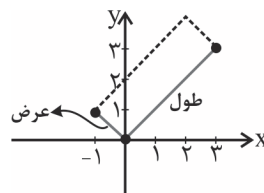
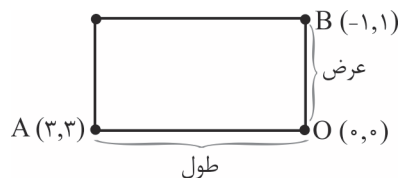
$$I \text{ تا } A: \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$I' \text{ تا } A: \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$S_{\square} = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

#### ✓ گزینه «۲»

ابتدا شکل مستطیل را رسم می‌کنیم.



اندازه طول و عرض مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$$OB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$S_{\square} = \sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$$

#### ✓ گزینه «۳»

دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(0, 4)$  از خط را داریم:

$$\left. \begin{matrix} (2, 0) \\ (0, 4) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m = \frac{4-0}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

#### ✓ گزینه «۲»

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه  $A(-1, 0)$  و  $B(0, 2)$  را می‌نویسیم:

$$m = \frac{2-0}{0-(-1)} = 2 \Rightarrow y = 2x + h \xrightarrow{x=-1, y=0} 0 = 2 \times (-1) + h \Rightarrow h = 2 \Rightarrow y = 2x + 2$$

محل تلاقی دو خط  $y = 2x + 2$  و  $y = x$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + y = 0 \end{cases} \times (-1)$$

$$x = -2 \Rightarrow x - y = 0 \xrightarrow{x=-2} -2 - y = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (-2, -2)$$

✓ گزینه ۷ «۱»

دو خط هنگامی موازیند که شیب‌های برابر داشته باشند.

$$m_{L_1} = L_1 \text{ شیب} = -\frac{m+1}{m}$$

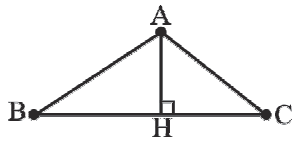
$$L_2: 3mx + (1+3m)y = 5 \Rightarrow m_{L_2} = L_2 \text{ شیب} = -\frac{3m}{1+3m} \Rightarrow L_2 \text{ باید مرتب شود:}$$

$$m_{L_1} = m_{L_2} \Rightarrow -\frac{m+1}{m} = -\frac{3m}{1+3m} \Rightarrow (1+3m)(m+1) = 3m(m)$$

$$m+1+3m^2+3m=3m^2 \Rightarrow 4m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

✓ گزینه ۸ «۱»

به شکل مقابل دقت کنید.



برای به دست آوردن طول AH باید فاصله نقطه A تا خط BC را بیابیم.

$$BC \text{ معادله خط} \Rightarrow \begin{cases} B(0, 1) \\ C(4, 7) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{7-1}{4-0} = 2$$

$$m = 2 \Rightarrow y = 2x + h \xrightarrow{x=0, y=1} 1 = 2 \times 0 + h \Rightarrow h = 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \text{ معادله خط}$$

$$\Rightarrow BC \text{ معادله خط: } 2x - y + 1 = 0$$

حال فاصله نقطه A تا خط BC را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{matrix} A(1, -2) \\ 2x - y - 1 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{فاصله نقطه A تا BC: } AH = \frac{|2(1) + 2 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

✓ ۹- گزینه «۲»

فاصله نقطه  $A(1,1)$  از  $y + m^2x - 2m = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|1 + m^2 - 2m|}{\sqrt{1 + m^4}} = \frac{|m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{1 + m^4}} = \frac{4}{\sqrt{1 + m^4}} \Rightarrow |m^2 - 2m + 1| = 4 \Rightarrow |(m-1)^2| = 4$$

$$(m-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 2 \Rightarrow m = 3 \\ m-1 = -2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

✓ ۱۰- گزینه «۲»

فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله باشند.

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta + 5$$

$$S = \alpha + \beta = 8$$

$$\alpha + \beta = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}\beta + 5 + \beta = 8 \Rightarrow \beta + 10 + 2\beta = 16 \Rightarrow 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \quad \text{و} \quad \alpha + \beta = 8 \Rightarrow \alpha = 6$$

پس:

$$P = \alpha\beta = m \rightarrow m = 12$$

✓ ۱۱- گزینه «۴»

فرض  $\alpha = \beta^2$  (\*)

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 27 \xrightarrow{*} \beta^2\beta = 27 \Rightarrow \beta^3 = 27 \Rightarrow \beta = 3 \xrightarrow{*} \alpha = \beta^2 \Rightarrow \alpha = 9$$

از طرفی  $\alpha + \beta = m$  پس:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = m \Rightarrow 9 + 3 = m \Rightarrow m = 12$$



### فهرست داخلی فصل دوم

۶۲	درس اول: ترسیم‌های هندسی
۶۸	سؤالات تشریحی درس اول
۶۹	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول
۷۱	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول
۷۲	درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس
۸۲	سؤالات تشریحی درس دوم
۸۳	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم
۸۵	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم
۸۶	درس سوم: تشابه مثلث‌ها
۹۴	سؤالات تشریحی درس سوم
۹۵	پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم
۹۷	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم
۹۸	تست‌های فصل دوم
۱۰۰	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل دوم



#### فهرست داخلی فصل سوم

۱۰۴	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع .....
۱۲۲	سؤالات تشریحی درس اول .....
۱۲۳	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول .....
۱۲۵	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول .....
۱۲۶	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یکبه یک .....
۱۳۴	سؤالات تشریحی درس دوم .....
۱۳۵	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم .....
۱۳۷	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم .....
۱۳۸	درس سوم: اعمال جبری روی توابع .....
۱۴۶	سؤالات تشریحی درس سوم .....
۱۴۷	پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم .....
۱۵۰	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم .....
۱۵۱	تست‌های فصل سوم .....
۱۵۳	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل سوم .....



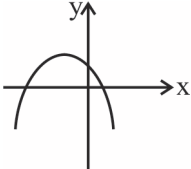
#### فهرست داخلی فصل چهارم

۱۵۶	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
۱۶۲	سؤالات تشریحی درس اول
۱۶۳	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول
۱۶۵	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول
۱۶۶	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۸۲	سؤالات تشریحی درس دوم
۱۸۳	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم
۱۸۵	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم
۱۸۶	درس سوم: توابع مثلثاتی
۱۹۴	سؤالات تشریحی درس سوم
۱۹۵	پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم
۱۹۶	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم
۱۹۷	بیش‌تر بدانیم
۱۹۸	تست‌های فصل چهارم
۲۰۰	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل چهارم



**آزمون**

**نوبت اول**

ردیف	سؤالات	بارم
۱	<p>در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) شیب خط <math>5 = 3x - 2y</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسانی باشد، روی ..... است.</p> <p>پ) اگر هر خط موازی محور ..... نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.</p> <p>ت) ۱ رادیان تقریباً برابر ..... درجه است.</p>	۲
۲	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) معادله درجه دوم <math>x^2 - 2x - 3 = 0</math> دارای چند ریشه متمایز است؟                      (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳</p> <p>ب) اگر نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه برابر ۵ باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها کدام است؟                      (۱) ۲۵ (۲) <math>\frac{1}{25}</math> (۳) ۵ (۴) ۴</p> <p>پ) اگر <math>D_f = [0, 4]</math> و <math>D_g = (-1, 3]</math> آن‌گاه دامنه تابع <math>f - g</math> کدام است؟                      (۱) <math>(-1, 4]</math> (۲) <math>[0, 3]</math> (۳) <math>[-1, 4]</math> (۴) <math>(0, 3]</math></p> <p>ت) کدام یک از زاویه‌های زیر، زاویه‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند؟                      (۱) <math>\frac{\pi}{3}</math> رادیان و <math>\frac{\pi}{3}</math> رادیان و <math>\frac{\pi}{3}</math> رادیان                      (۲) <math>\frac{\pi}{4}</math> رادیان و <math>\frac{\pi}{3}</math> رادیان و <math>\frac{\pi}{6}</math> رادیان                      (۳) <math>\frac{2\pi}{3}</math> رادیان و <math>\frac{\pi}{9}</math> رادیان و <math>\frac{8\pi}{36}</math> رادیان                      (۴) <math>\frac{\pi}{2}</math> رادیان و <math>90^\circ</math> و <math>45^\circ</math></p>	۲
۳	<p>سه نقطه <math>A(-1, -1)</math>، <math>B(3, -1)</math> و <math>C(2, 2)</math> تشکیل یک مثلث می‌دهند.</p> <p>الف) مثلث را رسم کنید.</p> <p>ب) محیط مثلث را به دست آورید.</p>	۱/۵
۴	<p>نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math> و <math>a \neq 0</math> رسم شده است. به کمک نمودار علامت <math>a</math>، <math>b</math> و <math>c</math> را مشخص کنید.</p> 	۱



#### فهرست دافلی فصل پنجم

۲۰۸	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۲۱۶	سؤالات تشریحی درس اول
۲۱۷	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول
۲۱۹	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول
۲۲۰	درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
۲۲۸	سؤالات تشریحی درس دوم
۲۲۹	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم
۲۴۱	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم
۲۴۲	درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
۲۵۲	سؤالات تشریحی درس سوم
۲۵۳	پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم
۲۵۴	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم
۲۵۵	بیش‌تر بدانیم
۲۵۶	تست‌های فصل پنجم
۲۵۸	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل پنجم



#### فهرست داخلی فصل ششم

۲۶۲	درس اول: فرایندهای حدی
۲۷۰	سؤالات تشریحی درس اول
۲۷۱	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول
۲۷۳	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول
۲۷۴	درس دوم: محاسبه حد توابع
۲۸۴	سؤالات تشریحی درس دوم
۲۸۵	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم
۲۸۷	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم
۲۸۸	درس سوم: پیوستگی
۲۹۸	سؤالات تشریحی درس سوم
۲۹۹	پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم
۳۰۱	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس سوم
۳۰۲	بیشتر بدانیم
۳۰۴	تست‌های فصل ششم
۳۰۶	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل ششم


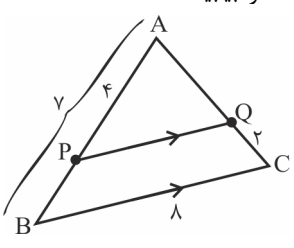


#### فهرست داخلی فصل هفتم

۳۱۰	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل .....
۳۲۴	سؤالات تشریحی درس اول .....
۳۲۵	پاسخ سؤالات تشریحی درس اول .....
۳۲۶	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس اول .....
۳۲۸	درس دوم: آمار توصیفی .....
۳۴۸	سؤالات تشریحی درس دوم .....
۳۴۹	پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم .....
۳۵۰	کاربرگ تمرینی دانش آموز درس دوم .....
۳۵۱	تست‌های فصل هفتم .....
۳۵۳	پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی تست‌های فصل هفتم .....

**آزمون**

**نوبت دوم**

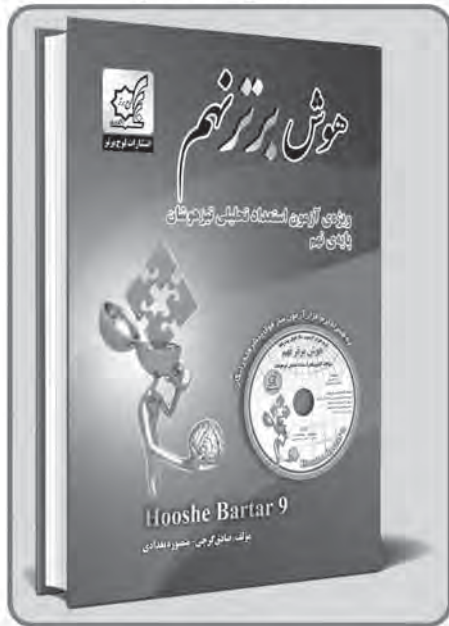
ردیف	سؤالات	بارم
۱	<p>در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) شرط عمود بودن دو خط آن است که دو خط دارای شیب‌های ..... و ..... یکدیگر باشند.</p> <p>ب) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط ..... است.</p> <p>پ) حاصل عبارت <math>[1 + \sqrt{2}]</math> برابر است با .....</p> <p>ت) اگر همه داده‌ها را در عدد ثابت C ضرب کنیم واریانس داده‌ها در ..... ضرب می‌شود.</p>	۱
۲	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = 3^x</math> در نقطه ..... محور عرض‌ها را قطع می‌کند.                      (۱) (۰, ۳)      (۲) (۰, -۳)      (۳) (۰, ۱)      (۴) (۱, ۰)</p> <p>ب) در معادله <math>x^2 + 3x - 1 = 0</math> حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟                      (۱) -۱      (۲) -۲      (۳) ۳      (۴) ۴</p> <p>پ) اگر <math>A = \frac{3}{4}</math> و <math>B = \frac{4}{3}</math> حاصل <math>\log A + \log B</math> کدام گزینه است؟                      (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) صفر      (۴) غیرقابل محاسبه</p> <p>ت) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{[x]}</math> کدام گزینه است؟                      (۱) <math>\frac{1}{2}</math>      (۲) صفر      (۳) <math>\frac{1}{3}</math>      (۴) وجود ندارد.</p>	۲
۳	<p>قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن شود.</p> 	۱
۴	<p>در شکل زیر <math>PQ \parallel BC</math> می‌باشد طول پاره‌خط‌های AQ و PQ را بیابید.</p> 	۱

**پاسخ تشریحی**

**آزمون نوبت اول و دوم**



## هوش برتر نهم



سوالات استعداد تحلیلی آزمون تیزهوشان نهم  
با نرم افزار آزمون ساز رایگان

## اسمارت نهم



آموزش ریاضی تیزهوشان و نمونه دولتی نهم  
با نرم افزار آزمون ساز رایگان

## اتاق فرمان نهم



انتخاب رشته آگاهانه و موفق در پایه نهم

## فست بوک ریاضی نهم

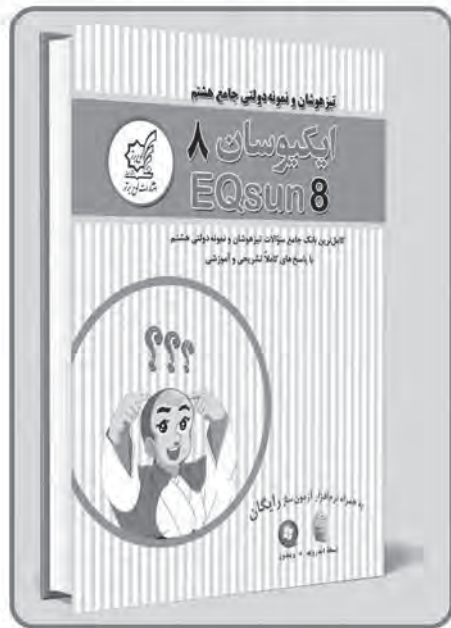


آموزش سریع، آسان و کامل ریاضی



برای آشنایی بیشتر و دریافت بخشی از متن کتابها QRcode مقابل را اسکن کنید.

## ایکیوسان هشتم



کامل ترین بانک سؤالات تیزهوشان و نمونه دولتی  
تمام دروس پایه هشتم (با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

## ایکیوسان هفتم



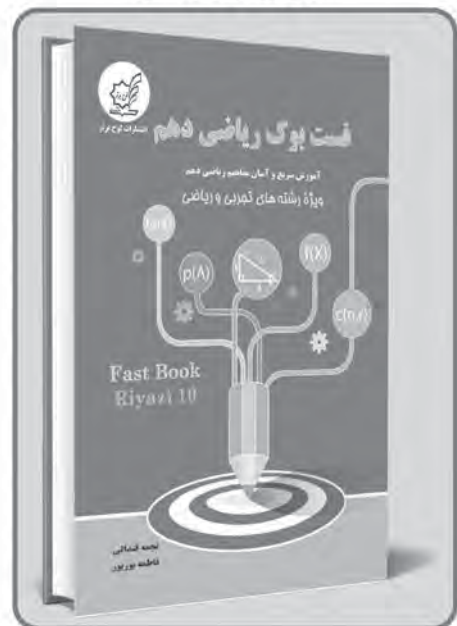
کامل ترین بانک سؤالات تیزهوشان و نمونه دولتی  
تمام دروس پایه هفتم (با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

## دکتر شو زیست دهم لوح برتر آموزش و تست کنکور



آموزش به سبک کنکور همراه با تست های جامع  
(با نرم افزار آزمون ساز رایگان)

## فست بوک ریاضی دهم تجربی و ریاضی



آموزش سریع، آسان و جامع ریاضی

# لوحة برتر انتخاب برتر

تلفن های ثبت سفارش و خرید:

۰۲۱ - ۶۶۹۷۱۹۷۰

۶۶۹۷۲۴۷۸

۶۶۹۷۱۸۰۴

۶۶۱۷۵۰۵۳



ارتباط با انتشارات لوح برتر:

تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی

بین لبافی نژاد و جمهوری، پلاک ۱۲۱۳

  [Lohebartarpub](https://www.facebook.com/Lohebartarpub)  [Lohebartar](https://www.t.me/Lohebartar)  [www.Lohebartar.ir](http://www.Lohebartar.ir)

سامانه پیامکی: ۰۳۶-۵۳۶۴۰۰۰-۳